

WORKING PAPER SERIES



**OTTO VON GUERICKE
UNIVERSITÄT
MAGDEBURG**

**FACULTY OF ECONOMICS
AND MANAGEMENT**

Impressum (§ 5 TMG)

Herausgeber:

Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Fakultät für Wirtschaftswissenschaft
Die Dekanin

Verantwortlich für diese Ausgabe:

Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Fakultät für Wirtschaftswissenschaft
Postfach 4120
39016 Magdeburg
Germany

<http://www.wv.uni-magdeburg.de/fwwdeka/femm/>

Bezug über den Herausgeber
ISSN 1615-4274

Konstruktion und Anwendung von Copulas in der Finanzwirtschaft

Copulas erfreuen sich in der Finanzwirtschaft wachsender Beliebtheit. Ursache hierfür ist insbesondere die Möglichkeit, mit ihrer Hilfe nicht-lineare Abhängigkeitsstrukturen darzustellen. Ein weiterer Vorteil besteht darin, dass multivariate Verteilungen mit Hilfe von Copulas separat in ihre Randverteilungen und in ihre Abhängigkeitsstruktur zerlegt werden können. Damit ist die Untersuchung der Abhängigkeitsstruktur losgelöst von Annahmen über die Randverteilungen. Diese Flexibilität ermöglicht die Anwendung von Copulas in zahlreichen Bereichen der Finanzwirtschaft, vom Risikomanagement über die Bewertung von komplexen Finanzprodukten bis zur Portfoliooptimierung. Die vorliegende Arbeit dient zum Einen als didaktischer Einstieg in die Copulathematik und stellt zum Anderen die aktuellen Forschungsergebnisse aus den genannten Bereichen vor.

Keywords: Copula, Portfoliomangement, Risikomanagement, Optionspreisbewertung

JEL: C16, C51, G11, G12, G15

The usage of copulas in modern finance has increased in the recent decades. The main reason for this is the possibility to describe non-linear dependency structures with the help of copulas. Furthermore, a copula allows separating a multivariate distribution into their marginal distributions and their dependency structure. This offers the opportunity to analyze the dependencies between random variables without considerations of their distributions. Applications of copulas range from risk management over pricing of complex financial instruments to portfolio allocation and optimization. The paper provides both a didactical introduction in copula theory and a summary for recent developments in the named research fields.

Keywords: copulas, portfolio management, risk management, option pricing

JEL: C16, C51, G11, G12, G15

1. Einleitung

Spätestens seit Beginn des neuen Jahrtausends haben sich Copulas in der finanzwirtschaftlichen Forschung etabliert. Insbesondere ihre Flexibilität ermöglicht den Einsatz in einer Vielzahl von aktuellen Forschungsgebieten. Im Portfoliomanagement bieten Copulas die Möglichkeit, Abhängigkeitsstrukturen zwischen Assets quasi beliebig zu modellieren. Mit Copulas können Randverteilungen separat von ihrer Abhängigkeitsstruktur modelliert und geschätzt werden. So bieten sie die Möglichkeit, verbesserte Schätzverfahren für Randverteilungen zu verwenden, da etwaige Annahmen über die Korrelation zwischen den Assets bereits über die Copula abgedeckt sind. Auch im Risikomanagement werden Copulas verwendet, um Abhängigkeiten zwischen Risikofaktoren zu modellieren. Dies ermöglicht insbesondere bei der Eigenkapitalunterlegung von Banken eine realitätsnähere Abschätzung der eingegangenen Risiken. Darauf aufbauend ermöglichen Copulas auch eine stetige Bewertung von Kreditderivaten wie Credit Default Swaps, Basket Default Swaps oder Collateralized Debt Obligations (CDOs). Auch für die Bepreisung von Derivaten können mittels Copulas Marktpreise abgeschätzt oder Preisgrenzen bestimmt werden. Dies ist insbesondere dann wichtig, wenn Standardbewertungsmodelle aufgrund der steigenden Komplexität der Finanzprodukte nicht angewendet werden können, wie zum Beispiel bei exotischen Optionen.

Dieser Aufsatz hat zweierlei Ziele: Zum Einen soll er als didaktischer Einstieg in die Copula-Thematik dienen. Nach einem kurzen Resümee klassischer Abhängigkeitsmaße werden die generellen Voraussetzungen von Copulas aufgezeigt (Abschnitt 2), die verschiedenen Copulaklassen vorgestellt (Abschnitt 3) und zusätzlich Schätz- sowie Simulationsverfahren für Copulas erklärt (Abschnitt 4). Im zweiten Teil des Aufsatzes (Abschnitt 5) werden die aktuellen Forschungsstände in den drei oben genannten Themengebieten zusammengefasst und Ausblicke für noch offene Forschungsfragen gegeben. Der Beitrag schließt mit einer kurzen Zusammenfassung (Abschnitt 6).

2. Klassische Abhängigkeitsmaße und ihre Grenzen

Der Korrelationskoeffizient nach *Bravais-Pearson* misst die Stärke und die Richtung des linearen Zusammenhangs zwischen zwei Zufallsvariablen X und Y . Für eine gegebene Stichprobe mit n Beobachtungen berechnet sich dieser Koeffizient als:

$$r_{XY} = \frac{s_{XY}}{s_X \cdot s_Y} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

mit

- (1) s_{XY} : Stichprobenkovarianz
 s_X, s_Y : Stichprobenstandardabweichung
 \bar{x}, \bar{y} : arithmetisches Mittel der Stichprobe.

Der Korrelationskoeffizient nimmt bekanntermaßen nur Werte im Intervall $[-1,1]$ an, wobei ein Wert von -1 (1) einen vollständig negativen (positiven) linearen Zusammenhang der Zufallsvariablen wiedergibt. Ein Wert von null impliziert keinen linearen Zusammenhang, wobei stochastisch unabhängige Zufallsvariable stets einen Korrelationskoeffizienten von null aufweisen. Voraussetzung für die Anwendung des *Bravais-Pearson*-Korrelationskoeffizienten ist, dass die Zufallsvariablen mindestens intervallskaliert und dass die Randverteilungen approximativ normalverteilt sind. Dies schränkt die Anwendung des Korrelationskoeffizienten ein.

Relaxiert man diese Annahmen und geht von ordinalskalierten oder nicht-normalverteilten Zufallsvariablen aus, kann die Abhängigkeit mittels Rangkorrelationskoeffizienten nach *Spearman* untersucht werden. Für den Rangkorrelationskoeffizienten wird nicht die Korrelation der tatsächlichen Beobachtungen untersucht, sondern die Abhängigkeit der Ränge der Beobachtungen. Für eine Stichprobe mit n Rangpaaren ergibt sich der *Spearman*-Rangkorrelationskoeffizient als:

$$r_s = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (rg(x_i) - \overline{rg_x}) \cdot (rg(y_i) - \overline{rg_y})}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (rg(x_i) - \overline{rg_x})^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (rg(y_i) - \overline{rg_y})^2}}$$

(2)

mit

- $rg(x_i), rg(y_i)$: Rang der i -ten Beobachtung
 $\overline{rg_x}, \overline{rg_y}$: arithmetisches Mittel der Stichprobenränge.

Einzigste Annahme des *Spearman*-Rangkorrelationskoeffizienten ist, dass die Abstände der Ränge gleich sind (Äquidistanz). Auch der Rangkorrelationskoeffizient nimmt Werte im Intervall $[-1,1]$ an, wobei dieser Korrelationskoeffizient lediglich den monotonen

Zusammenhang zweier Zufallsvariablen misst. Dies bedeutet, dass ein $r_s < 0$ ($r_s > 0$) lediglich einen diskordanten (konkordanten) Zusammenhang misst.

Abstrahiert man nun noch von der Annahme der Äquidistanz, also von der Annahme, dass die numerische Differenz der Ränge gleich ist, verwendet man als Abhängigkeitsmaß *Kendall's Tau*. Für dieses Abhängigkeitsmaß ist nur die relative Anordnung der Ränge von Bedeutung. Für den Fall, dass keine Bindungen zwischen den Rängen vorliegen, berechnet sich *Kendall's Tau* für n Rangpaare als:

$$\tau = \frac{n_p - n_d}{n \cdot (n-1)/2}$$

(3)

mit

n_p : Anzahl der konkordanten Rangpaare

n_d : Anzahl der diskordanten Rangpaare.

Auch *Kendall's Tau* liegt im Intervall $[-1,1]$ und gibt, ähnlich wie der *Spearman-Rangkorrelationskoeffizient*, die Stärke des monotonen Zusammenhangs an. Durbin und Stuart (1951) bewiesen einen funktionalen Zusammenhang zwischen dem *Spearman-Rangkorrelationskoeffizienten* und *Kendall's Tau*.

Nachteil aller genannten Abhängigkeitsmaße ist, dass die Stärke des Zusammenhangs über alle Beobachtungen konstant bleibt. Für stark vom Mittelwert abweichende Zufallsrealisationen wird eine ebenso starke Abhängigkeit wie bei „regulären“ Realisationen unterstellt. Dies ist jedoch in der Empirie häufig nicht beobachtbar. Im Gegenteil, oft verstärkt sich sogar die Abhängigkeit von Ausreißern (*tail dependence*). Diese Art der Anhängigkeit kann durch die klassischen Korrelationsmaße nicht erklärt werden. Ein weiterer Nachteil besteht darin, dass die genannten Abhängigkeitsmaße symmetrisch sind und somit negative und positive Ausreißer in den Beobachtungen die gleiche Abhängigkeitsstärke besitzen. Insbesondere die *lower tail dependence*, die in der Empirie z. B. bei gemeinsamen Kursverläufen beobachtbar ist, wird nicht abgebildet. Embrechts, McNeil und Straumann (1999) analysieren die genannten Schwachpunkte und zeigen mögliche Alternativen für die klassischen Abhängigkeitsmaße mittels Copulas auf.

3. Copulas

Die Entwicklung von Copulas begann mit den Arbeiten von Sklar (1959) und Hoeffding (1940, 1941), die eine Funktion entwickeln, welche eindimensionale Verteilungen zu einer multivariaten Verteilung verbindet. Eine Copula stellt nun eine multivariate Verteilungsfunktion mit gleichverteilten Randverteilungen dar. Folglich kann eine beliebige multivariate Verteilung wie folgt dargestellt werden:

$$F(x_1, \dots, x_n) = C[F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)]$$

mit

(4) $F(\cdot)$: multivariate Verteilungsfunktion
 $C[\cdot]$: Verteilungsfunktion der Copula
 $F_i(\cdot)$: univariate Verteilungsfunktion/Randverteilung.

Generell muss eine Funktion C folgende Bedingungen erfüllen, damit sie gemäß der Definition von Sklar (1959) eine Copula ist:

Eine Funktion $C: [0,1]^n \rightarrow [0,1]$ ist eine n -dimensionale Copula wenn gilt:

- $C(1, \dots, 1, u, 1, \dots, 1) = u, \forall u \in [0,1]$,
- $C(u_1, \dots, u_n) = 0, \forall u_i \in [0,1]$, wenn für mindestens ein u_i gilt: $u_i = 0$,
- C ist beschränkt und in n steigend.

Die beiden erstgenannten Bedingungen sollen an einem einfachen diskreten zwei-dimensionalen Beispiel verdeutlicht werden. Für zwei Zufallsvariablen u und v existieren jeweils zwei mögliche Ausprägungen gemäß Tabelle 1.

$u \setminus v$	v_1	v_2	Summe
u_1	$P(u_1, v_1)$	$P(u_1, v_2)$	$P(u_1)$
u_2	$P(u_2, v_1)$	$P(u_2, v_2)$	$P(u_2)$
Summe	$P(v_1)$	$P(v_2)$	1

Tabelle 1: Kontingenztabelle zweier diskreter Zufallsvariablen mit je zwei möglichen Ausprägungen

Im Rahmen unseres Beispiels fordert die erste Bedingung, dass folgende Beziehung gelten muss: $P(v_1) = 1 \Rightarrow P(u_1, v_1) = P(u_1)$. Aus der zweiten Bedingung folgt:

$P(v_1) = 0 \Rightarrow P(u_1, v_1) = 0$. Die dritte Bedingung besagt, dass die Copula selbst beschränkt ist auf das Intervall $[0,1]$ und sie in jedem Punkt steigend ist. Letztere ist eine notwendige Bedingung für multivariate Verteilungsfunktionen, da sie negative Wahrscheinlichkeiten ausschließt. Diese Voraussetzungen bilden die Grundbedingungen für eine Copula. Die genaue Gestalt der Copula hängt nun von der unterstellten Abhängigkeitsstruktur ab.

Generell können Copulas in drei Unterkategorien unterteilt werden: Elliptische Copulas, *Archimedische* Copulas und Extremwertcopulas. Elliptische Copulas leiten sich aus elliptischen multivariaten Verteilungsfunktionen ab. Bekannteste Vertreter dieser Copulas sind die *Gauss*-Copula und die *t*-Copula, wobei Erstere aus einer multivariaten Normalverteilung und Letztere aus einer multivariaten *t*-Verteilung hergeleitet werden. Die *Gauss*-Copula besitzt folgende allgemeine Form:

$$(5) \quad C(x_1, \dots, x_n) = \Phi_\rho(\Phi^{-1}(x_1), \dots, \Phi^{-1}(x_n))$$

mit
 $\Phi_\rho(\cdot)$: multivariate Normalverteilung mit Korrelationsmatrix ρ
 $\Phi^{-1}(\cdot)$: Inverse der univariaten Normalverteilung.

Für den bivariaten Fall lautet die *Gauss*-Copula:

$$(6) \quad C(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(x_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(x_2)} \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left(-\frac{s_1^2 - 2 \cdot \rho \cdot s_1 \cdot s_2 + s_2^2}{2 \cdot (1-\rho^2)}\right) ds_1 ds_2.$$

Analog weist die *t*-Copula folgende allgemeine Form auf:

$$(7) \quad C(x_1, \dots, x_n) = t_{\rho, v}(t_v^{-1}(x_1), \dots, t_v^{-1}(x_n))$$

mit
 $t_{\rho, v}(\cdot)$: multivariate *t*-Verteilung mit Korrelationsmatrix ρ und Freiheitsgrade v
 $t_v^{-1}(\cdot)$: Inverse der univariaten *t*-Verteilung.

Für den bivariaten Fall gilt dann:

$$(8) \quad C(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(x_1)} \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(x_2)} \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{1-\rho^2}} \cdot \left(1 + \frac{s_1^2 - 2 \cdot \rho \cdot s_1 \cdot s_2 + s_2^2}{v \cdot (1-\rho^2)}\right)^{-\frac{v+2}{2}} ds_1 ds_2.$$

Für wachsende Freiheitsgrade konvergiert die t -Copula gegen eine *Gauss*-Copula. Jedoch besitzt die t -Copula für eine geringe Anzahl von Freiheitsgraden mehr Beobachtungen an den Rändern und weist somit *tail dependence* auf.

Archimedische Copulas, benannt nach Ling (1965), leiten sich von einer beliebigen Generatorfunktion γ ab, die folgende Eigenschaften erfüllen muss:

- $\gamma : [0,1] \rightarrow [0, \infty)$,
- $\gamma(1) = 0$,
- stetig, konvex, streng monoton fallend.

Erfüllt die Generatorfunktion diese Eigenschaften, ergibt sich die Pseudo-Inverse $\gamma^{[-1]}$ dieser Funktion als:

$$(9) \quad \gamma^{[-1]}(x) = \begin{cases} \gamma^{-1}(x) & 0 \leq x \leq \gamma(0) \\ 0 & x \geq \gamma(0). \end{cases}$$

Die Funktion $C_n(u_1, \dots, u_n) = \gamma^{[-1]}(\gamma(u_1) + \dots + \gamma(u_n))$ ist dann eine n -dimensionale *Archimedische* Copula unter der Generatorfunktion γ . Die bekanntesten Vertreter der Klasse der *Archimedischen* Copulas sind die *Gumbel*-Copula, eingeführt von Gumbel (1960), die *Clayton*-Copula, eingeführt von Clayton (1978) und die *Frank*-Copula, benannt nach Frank (1979). Tabelle 2 enthält für die drei genannten *Archimedischen* Copulas die jeweilige Generatorfunktion sowie deren Inverse.

<i>Copula</i>	<i>Generatorfunktion</i> γ	<i>Inverse</i> γ^{-1}
Gumbel	$\gamma(x) = (-\ln x)^\lambda$	$\gamma^{-1}(x) = \exp\left(-x^{\frac{1}{\lambda}}\right)$
Clayton	$\gamma(x) = \frac{1}{\lambda}(x^{-\lambda} - 1)$	$\gamma^{-1}(x) = (\lambda \cdot x + 1)^{\frac{1}{\lambda}}$
Frank	$\gamma(x) = -\ln\left(\frac{\exp(-\lambda \cdot x) - 1}{\exp(-\lambda) - 1}\right)$	$\gamma^{-1}(x) = -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln(1 + \exp(-x) \cdot (\exp(-\lambda) + 1))$

Tabelle 2: Generatorfunktionen und Inverse von Archimedischen Copulas

Extremwertcopulas werden aus multivariaten Extremwertverteilungen hergeleitet. Extremwertverteilungen sind Verteilungen der Maxima einer stetigen Zufallsvariablen für eine große Anzahl an Beobachtungen. Das Konzept ist dem des zentralen Grenzwertsatzes recht ähnlich. Für eine große Anzahl an Stichproben sind die jeweiligen Maxima der Stichproben extrem-verteilt. Bekanntester Vertreter dieser Klasse ist die *Marshall-Olkin-Copula*, entwickelt von Marshall und Olkin (1967).¹

Bevor näher auf die Konstruktion sowie auf die Verwendung von Copulas in der Finanzwirtschaft eingegangen wird, soll Abbildung 1 veranschaulichen, welche unterschiedlichen Abhängigkeitsstrukturen mittels verschiedener Copulas erzeugt werden können. Hier wird bereits die Universalität des Copula-Konzepts ersichtlich.

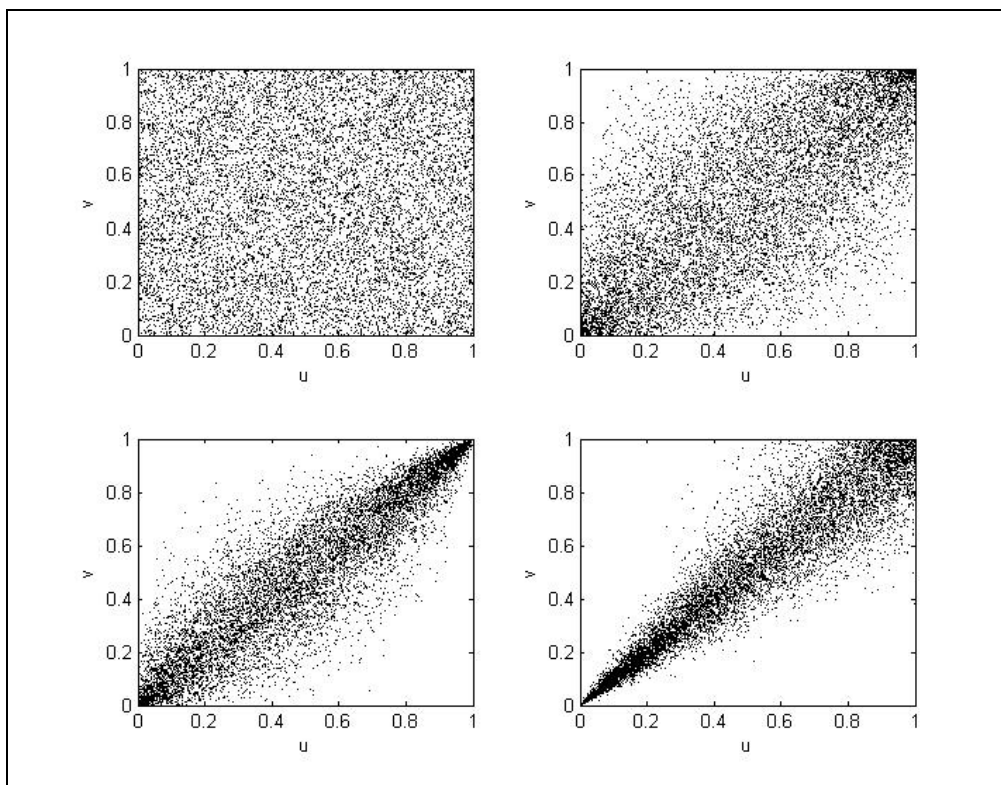


Abbildung 1: Simulationsergebnisse zweier gleichverteilter Zufallsvariablen, oben links: unabhängige Zufallsvariablen, oben rechts: Gauss-Copula, unten links: Gumbel-Copula, unten rechts: Clayton-Copula.

¹ Für einen ausführlicheren Einblick in die Copulathematik vgl. Nelsen (2006) sowie Malvergne und Sorente (2006).

4. Schätzung und Konstruktion von Copulas

4.1. Schätzung von Copulas auf Basis historischer Daten

Generell existieren es drei verschiedene Möglichkeiten, eine Copula aus einem gegebenen Datensatz zu schätzen: die parameterfreie Schätzung, die semi-parametrische Schätzung und die parametrische Schätzung. Für jede dieser Möglichkeiten soll im Folgenden ein Verfahren vorgestellt werden.

Bei der parameterfreien Schätzung ist das Ziel, eine Copula auf Basis der gegebenen Daten zu konstruieren, ohne dabei eine bestimmte Copulaklasse oder -typ vorzugeben oder Parameter der Copula zu schätzen. Ein Vorteil dieser Schätzmethode besteht in der relativ unkomplizierten Art, aus einer Stichprobe heraus eine Copula zu schätzen. Nachteilig ist, dass die Stichprobe hinreichend groß sein muss, um eine hohe Güte des Schätzers sicherzustellen. Das bekannteste parameterfreie Schätzverfahren ist die empirische Copula von Deheuvels (1979). Die Idee von Deheuvels basiert auf dem Theorem von Glivenko (1933) und Cantelli (1933), welches besagt, dass eine empirische Verteilungsfunktion einer Stichprobe fast sicher gegen die zugrunde liegende Verteilungsfunktion konvergiert.

Gegeben sei nun eine n -dimensionale Stichprobe \mathbf{X} vom Umfang T : $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n) = \{(x_1(1), \dots, x_n(1)), \dots, (x_1(T), \dots, x_n(T))\}$. Der Schätzer für die empirische multivariate Verteilungsfunktion F von \mathbf{X} lautet dann:

$$(10) \quad \widehat{F}(\mathbf{x}) = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^T \mathbf{1}_{\{x_1(k) \leq x_1, \dots, x_n(k) \leq x_n\}}.$$

Die zugehörigen Schätzer der empirischen Randverteilungen von X_i lauten:

$$(11) \quad \widehat{F}_i(x_i) = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^T \mathbf{1}_{\{x_i(k) \leq x_i\}}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Bedauerlicherweise werden durch diese Schätzer stetige Randverteilungen diskretisiert. Daher ist die geschätzte empirische Copula im mathematischen Sinne nicht eindeutig,

sondern lediglich ein parameterfreier eindeutiger Schätzer der Copula für die diskreten Punkte $\left(\frac{i_1}{T}, \dots, \frac{i_n}{T}\right)$ mit $i_k \in \{1, \dots, T\}$. Die empirische Copula ergibt sich dann als:

$$(12) \quad \hat{C}\left(\frac{i_1}{T}, \dots, \frac{i_n}{T}\right) = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^T 1_{\{x_1(k) \leq x_1(i_1; T), \dots, x_n(k) \leq x_n(i_n; T)\}},$$

wobei $x_p(k; T)$ die k -te Ordnungsstatistik der Stichprobe $\{x_p(1), \dots, x_p(T)\}$ bezeichnet.

Das folgende Beispiel soll das Schätzverfahren illustrieren. Gegeben sei eine zweidimensionale Stichprobe vom Umfang $T=3$ mit $\mathbf{X} = (X_1, X_2) = \{(3, 8), (1, 5), (4, 7)\}$.

Für den Punkt $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ nimmt die empirische Copula den Wert $\frac{1}{3}$ an, da

$\{x_1(k) \leq 1, x_2(k) \leq 5\}$ nur für die zweite Beobachtung erfüllt ist. Diese Prozedur muss

nun $3^2=9$ mal durchgeführt werden, um alle Werte der diskreten Punkte der empirischen

Copula zu ermitteln. Die vollständige empirische Copula für das oben genannte Beispiel

lautet:

$$(13) \quad \hat{C}\left(\frac{i_1}{3}, \frac{i_2}{3}\right) = \begin{cases} 0 & i_1 = 0, i_2 = 0 \\ \frac{1}{3} & i_1 = 1, i_2 = 1 \\ \frac{1}{3} & i_1 = 1, i_2 = 2 \\ \frac{1}{3} & i_1 = 1, i_2 = 3 \\ \frac{1}{3} & i_1 = 2, i_2 = 1 \\ \frac{1}{3} & i_1 = 2, i_2 = 2 \\ \frac{2}{3} & i_1 = 2, i_2 = 3 \\ \frac{1}{3} & i_1 = 3, i_2 = 1 \\ \frac{2}{3} & i_1 = 3, i_2 = 2 \\ 1 & i_1 = 3, i_2 = 3 \end{cases}$$

Wie bereits erwähnt, ist die ermittelte empirische Copula nicht stetig. Um dennoch Werte für die empirische Copula zwischen zwei diskreten Punkten zu erhalten, können die

Copulawerte zwischen ermittelten Punkten multilinear interpoliert werden, worauf wir jedoch nicht näher eingehen.²

Verwendet man zur Schätzung der Copula ein semi-parametrisches Schätzverfahren, werden lediglich die Parameter der Copula geschätzt. Daher werden keinerlei Annahmen über die Randverteilungen getroffen. Das bekannteste semi-parametrische Verfahren ist die Schätzung der Copulaparameter auf Basis von Abhängigkeitsmaßen. Hierzu werden Abhängigkeitsmaße wie zum Beispiel *Kendall's Tau* oder der *Spearman-Rangkorrelationskoeffizient* verwendet, um die Copulaparameter zu schätzen. Dieses Verfahrens besitzt den Nachteil, dass bereits vor der Schätzung eine Annahme über die Copulafamilie getroffen werden muss. Unterstellt man beispielsweise eine Abhängigkeitsstruktur gemäß einer *Gauss-Copula*, wird die benötigte Korrelationsmatrix über die jeweiligen *Spearman-Rangkorrelationskoeffizienten* der uniformisierten Randverteilungen geschätzt. Unterstellt man hingegen eine Abhängigkeitsstruktur gemäß einer *Archimedischen Copula*, zeigen Genest und McKay (1986a,b), dass folgender Zusammenhang zwischen Generatorfunktion γ und *Kendall's Tau* besteht:

$$(14) \quad \tau = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\gamma(t)}{\gamma'(t)} dt,$$

wobei die Generatorfunktion eine Funktion des Copulaparameters λ ist. Folglich kann Gleichung (14) nach λ aufgelöst werden. Tabelle 3 gibt den jeweiligen funktionalen Zusammenhang zwischen *Kendall's Tau* und dem Copulaparameter λ für die oben genannten *Archimedischen Copulas* an.

<i>Copula</i>	<i>Kendall's Tau</i>
Gumbel	$\tau = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$
Clayton	$\tau = \frac{\lambda}{\lambda + 2}$

² Vgl. Li et al. (1997) sowie Li, Mikusinski und Taylor (1998) für mögliche Methoden zur multilinearen Interpolation.

$$\text{Frank} \quad 1 - \frac{4}{\lambda} \cdot \left(1 - \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \frac{t}{e^t - 1} dt \right)$$

Tabelle 3: Funktionaler Zusammenhang zwischen Kendall's Tau und dem Copulaparameter

Dieses semi-parametrische Verfahren eignet sich jedoch nur für bivariate Copulas. Für multivariate Copulas kommt das Pseudo-Maximum-Likelihood-Verfahren nach Genest, Ghoudi und Rivest (1995) in Frage. Bei diesem Verfahren wird die Log-Likelihoodfunktion der Copula unter der Verwendung von Pseudorealisationen maximiert, welche man aus den empirischen Verteilungen der Randverteilungen erhält.

Die dritte Möglichkeit, eine Copula zu schätzen, stellt die parametrische Schätzung dar. Hierbei werden sowohl die Parameter der jeweiligen Randverteilung als auch die Copulaparameter geschätzt. Das gängigste Verfahren ist die Maximierung der Log-Likelihoodfunktion.³ Gegeben sei wiederum eine n -dimensionale Stichprobe \mathbf{X} vom Umfang T . Die zugehörige multivariate Verteilungsfunktion $F(\mathbf{X})$ ergibt sich als:

$$F(\mathbf{x}; \theta_1, \dots, \theta_n; \lambda) = C(F_1(x_1; \theta_1), \dots, F_n(x_n; \theta_n); \lambda)$$

(15) mit
 θ_i : Parameter der Randverteilung
 λ : Copulaparameter.

Die Log-Likelihoodfunktion für die gemeinsame Verteilung lautet dann:

³ Kim, Silvapulle und Silvapulle (2007) bieten einen umfassenden Vergleich von parametrischen und semi-parametrischen Schätzverfahren für verschiedene Copulas.

$$\begin{aligned}
L(\theta_1, \dots, \theta_n; \lambda) &= \sum_{k=1}^T \log f(x(k); \theta_1, \dots, \theta_n; \lambda) \\
&= \sum_{k=1}^T \log c(F_1(x_1(k); \theta_1), \dots, F_n(x_n(k); \theta_n); \lambda) \\
&\quad + \sum_{k=1}^T \log f_1(x_1(k); \theta_1) \\
&\quad \vdots \\
(16) \quad &\quad + \sum_{k=1}^T \log f_n(x_n(k); \theta_n)
\end{aligned}$$

mit

$f(\cdot)$: multivariate Dichtefunktion

$f_i(\cdot)$: univariate Dichtefunktion

$c(\cdot)$: Dichtefunktion der Copula.

Für die Maximierung der Log-Likelihoodfunktion ergeben sich nun zwei Möglichkeiten. Zum Einen kann für Gleichung (16) ein globales Maximum gesucht werden, indem über die Parameter der jeweiligen Randverteilungen und den Copulaparametern maximiert wird. Sind die Stichprobenumfänge für die einzelnen Randverteilungen jedoch unterschiedlich groß, sollte hingegen eine zweistufige Maximierungsprozedur gewählt werden.

Für die Suche nach dem globalen Maximum von Gleichung (16) müssen die Stichprobenumfänge für die einzelnen Randverteilungen so angepasst werden, dass alle den gleichen Umfang aufweisen. Dies kann zu einem erheblichen Datenverlust führen und somit zu Ungenauigkeiten, da die Parameter der Randverteilungen teilweise nicht über den kompletten Stichprobenumfang geschätzt werden. Bei der zweistufigen Maximierung werden zunächst die Log-Likelihoodfunktionen der einzelnen Randverteilungen bezüglich der Parameter der Randverteilung maximiert. Dies hat zur Folge, dass für die jeweilige Maximierung der vollständige Stichprobenumfang verwendet werden kann.

Die Log-Likelihoodfunktionen der Randverteilungen lauten $\sum_{k=1}^T \log f_n(x_n(k); \theta_n)$. In

einem zweiten Schritt wird dann Gleichung (16) bezüglich λ maximiert, wobei für die Parameter der Randverteilungen die Schätzer aus den vorherigen Maximierungen verwendet werden.

4.2. Simulation von abhängigen Zufallsvariablen mittels Copulas

Ist die Abhängigkeitsstruktur bereits bekannt oder wurde sie bereits geschätzt, können im nächsten Schritt zufällige Realisationen simuliert werden. Die einfachste Methode zur Simulation abhängiger Zufallsvariablen mittels Copulas ist die Monte-Carlo-Inversionsmethode. Der Simulationsalgorithmus beinhaltet die folgenden Schritte:

1. Generierung von n unabhängig gleichverteilten Realisationen v_1, \dots, v_n ;
2. Transformation der unabhängig gleichverteilten Realisationen in abhängig gleichverteilte Zufallsvariablen u_1, \dots, u_n gemäß der Copula C ;
3. Generierung der abhängigen Realisationen x_1, \dots, x_n durch Einsetzen der Realisationen u_1, \dots, u_n in die Inversen der Randverteilungen F_i : $x_i = F_i^{-1}(u_i)$.

Der zweite Schritt soll anhand einer bivariaten *Gauss*-Copula sowie einer bivariaten *Clayton*-Copula veranschaulicht werden. Für die bivariate *Gauss*-Copula werden zunächst die unabhängig gleichverteilten Realisationen v_1 und v_2 in unabhängig standardnormalverteilte Realisationen $z_i = N_{0,1}^{-1}(v_i)$, $i = 1, 2$ transformiert. Diese werden wiederum mittels *Cholesky*-Zerlegung in zwei abhängig standardnormalverteilte Realisationen $y_1 = z_1$ und $y_2 = \rho \cdot z_1 + \sqrt{1 - \rho^2} \cdot z_2$ transformiert. In einem letzten Schritt werden die abhängig standardnormalverteilten Realisationen in abhängig gleichverteilte Realisationen $u_i = N_{0,1}(y_i)$, $i = 1, 2$ transformiert. Diese können nun im dritten Schritt des Simulationsalgorithmus in die Inverse der jeweiligen Randverteilung eingesetzt werden, um so abhängige Realisationen zu gewinnen.

Verwendet man zur Simulation eine bivariate *Clayton*-Copula

$C(u_1, u_2) = (u_1^{-\lambda} + u_2^{-\lambda} + 1)^{-\frac{1}{\lambda}}$, werden die unabhängig gleichverteilten Realisationen mittels des Satzes von *Bayes* in zwei abhängig gleichverteilte Realisationen transformiert. Der Satz von *Bayes* besagt, dass die bedingte Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A gegeben B dem Quotienten aus der gemeinsamen Wahrscheinlichkeit der Ereignisse A und B und der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B entspricht; formal:

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$. Für eine bivariate *Archimedische* Copula ergibt sich die bedingte

Wahrscheinlichkeit v_2 aus:

$$v_2 = C(u_2 | u_1) = \frac{\gamma^{-1}(\gamma(u_1) + \gamma(u_2))}{\gamma^{-1}(\gamma(u_1))}$$

(17)

mit

$\gamma^{-1}(\cdot)$: Ableitung der Inversen der Generatorfunktion.

Unter der Annahme $u_1 = v_1$ kann für die bivariate *Clayton*-Copula die in Gleichung (17) genannte Beziehung umgestellt werden:

$$(18) \quad u_2 = \left(v_1^{-\lambda} \cdot \left(v_2^{-\lambda/\lambda+1} - 1 \right) + 1 \right)^{-1/\lambda}.$$

Die so erhaltenen abhängig gleichverteilten Zufallsvariablen können dann im letzten Schritt des Simulationsalgorithmus wiederum in die Inversen der Randverteilungen eingesetzt werden.

5. Anwendungsbeispiele in der Finanzwirtschaft

5.1. Portfoliomanagement

Die generelle Idee der Portfoliooptimierung basiert auf Markowitz (1952), der erstmals ein Portfolio bezüglich der Rendite und des damit verbundenen Risikos optimiert. Voraussetzungen für den *Markowitz*-Ansatz ist jedoch, dass die Anlagenrenditen multivariat-normalverteilt sind und die Kovarianzmatrix die Abhängigkeit zwischen den Anlagen adäquat beschreibt. Es wird also unterstellt, dass die Abhängigkeiten zwischen jeweils zwei Aktienrenditen sowohl symmetrisch als auch linear sind und die Aktienrenditen normalverteilt sind. Zahlreiche empirische Studien belegen jedoch, dass sowohl die Annahme der Normalverteilung der Renditen als auch die Annahme der Symmetrie der Abhängigkeiten regelmäßig verletzt sind.

Hennessy und Lapan (2002) zeigen die allgemeine Lösung des Portfolioallokationsproblems unter der Bedingung einer *von-Neumann-Morgenstern*-Nutzenfunktion sowie einer Abhängigkeitsstruktur gemäß einer beliebigen *Archimedischen* Copula. Patton (2004) untersucht die Portfolioentscheidung von Investoren mit konstanter relativer

Risikoaversion zwischen risikoloser Anlage und risikobehaftetem Portfolio unter der Berücksichtigung von asymmetrischen Randverteilungen und asymmetrischer Abhängigkeitsstruktur zwischen den risikobehafteten Assets. Es zeigt sich, dass insbesondere ohne Leerverkaufsbeschränkungen Copulamodelle deutlich besser abschneiden, wobei die Copulaparameter mittels Lag-Regressionsmodellen geschätzt werden. Als Randverteilungen werden schiefe t -Verteilungen angenommen, deren Parameter teilweise mittels transformierten TARARCH-Modellen geschätzt werden.

Zudem existieren zahlreiche Studien, die keine Annahme über die Nutzenfunktion der Investoren treffen und lediglich die risikobehafteten Portfolios optimieren oder gemeinsame Kursverläufe schätzen, welche dann für Portfoliooptimierungen verwendet werden können. Patton (2006) schätzt die gemeinsame Kursentwicklung von Wechselkursen mittels einer *Gauss*-Copula sowie einer symmetrisierten *Joe-Clayton*-Copula. Die Randverteilungen werden mittels AR- t -GARCH-Modelle geschätzt. Seine Analyse zeigt, dass asymmetrische Abhängigkeiten zwischen den Wechselkursen vorherrschen und diese zeitabhängig sind.

Jondeau und Rockinger (2006) schätzen die gemeinsame Renditeentwicklung von vier Aktienindizes mittels einer *Gauss*- und einer t -Copula, wobei die Randverteilung über eine schiefe t -Verteilung geschätzt werden. Asymmetrische Abhängigkeiten werden zusätzlich mittels eines *Markov*-Switching-Modells integriert. Hu (2006) verwendet für die Schätzung der Abhängigkeitsstruktur eine Mischverteilung aus mehreren Copulas, wobei er die Randverteilungen nichtparametrisch mittels empirischer Verteilungen schätzt. Bai und Sun (2007) optimieren ein Portfolio aus drei Aktienindizes, wobei eine Abhängigkeitsstruktur gemäß einer *Clayton*-Copula unterstellt wird. Die Randverteilungen der Renditen folgen einem GARCH-Prozess. Als Ergebnis zeigt sich, dass das Copulamodell eine bessere Performance aufweist als die herkömmlich *Markowitz*optimierung.

Okimoto (2008) untersucht amerikanische und britische Aktienindizes über den Zeitraum von 1973 bis 2003 auf *lower tail dependence*. Er analysiert das eingegangene Risiko der Indexportfolios unter Verwendung verschiedener Copulas und eines *Markov*-Switching-Prozesses. Ein Ergebnis dieser Studie ist, dass in konjunkturellen Abschwungphasen die Korrelation zwischen den Indizes zunimmt. Die Nichtberücksich-

tung dieser *lower tail dependence* kann zu einer Unterschätzung des eingegangenen Risikos (gemessen durch den Value-at-Risk) führen. Sun et al. (2008) verwenden Hochfrequenzdaten deutscher Aktienindizes für den Zeitraum Januar bis September 2006. Sie schätzen die gemeinsame Kursbewegung von sechs Aktienindizes mittels eines Copula-ARMA-GARCH-Modells, wobei sie unterschiedliche Copulas verwenden und unterschiedliche Annahmen über die Randverteilungen treffen. Die geschätzten gemeinsamen Kursverläufe werden dann mit den realen Verläufen verglichen. Als Ergebnis zeigte sich, dass die schiefe t -Copula in Verbindung mit einem Lévy-fractional-stable ARMA-GARCH-Modell die besten Schätzergebnisse liefert.⁴

Eine ähnliche Untersuchung wird auch von Chollete, Heinen und Valdesogo (2009) durchgeführt. Sie verwenden für die Schätzung der Abhängigkeitsstruktur ein Regime-Switching-Copulamodell, das eine deutlich höhere Flexibilität aufweist als die Referenzmodelle. Auch sie verwenden für die Schätzung der Randverteilungen ein GARCH-Modell. Weitere Untersuchungen bezüglich der Entwicklung und Verbesserung von Schätzverfahren für gemeinsame Kursverläufe mittels GARCH-Modellen und Copulas liefern Lee und Long (2009).

Min und Czado (2010) verwenden für die Abhängigkeitsmodellierung einen Pair-Copula-Ansatz. Hatherley and Alcock (2007) untersuchen die Auswirkungen der Berücksichtigung von *lower tail dependence* auf die Portfolioperformance. Hierzu verwenden sie ein Portfolio bestehend aus drei australischen Branchenindizes, wobei die Abhängigkeitsstruktur mittels einer *Clayton*-Copula modelliert wird und die Renditeverteilungen normalverteilt sind. Ihre Ergebnisse zeigen, dass die Berücksichtigung von asymmetrischen Abhängigkeitsstrukturen zu einer signifikanten Performanceerhöhung führt. Als Referenz dient hierbei ein *Markowitz*-optimiertes Portfolio.

5.2. Risikomanagement

Die Berücksichtigung von nicht-linearen Abhängigkeiten mittels Copulas im Risikomanagement, insbesondere bei der Schätzung von möglichen Verlusten aus Kreditgeschäften, begann deutlich früher als im Portfoliomanagement. Erstmals verwendet Vasicek (1987) eine *Gauss*-Copula zur Modellierung der Abhängigkeit zwischen den Assets der verschiedenen Kreditnehmer und die daraus resultierende simultane Ausfallwahrschein-

⁴ Einen Überblick über Lévy-Prozesse und Lévy-Verteilungen bietet Sato (1999).

lichkeit. Das *Vasicek*-Modell, das den Ansatz von Merton (1974) auf die Portfolioebene überträgt, wurde im Jahr 2004 als Standard zur Kreditrisikoschätzung in die Basel-II-Regularien aufgenommen.

Schönbucher (2002) erweitert den Ansatz von Vasicek (1987), indem er asymmetrische Abhängigkeiten mittels *Archimedischer* Copulas einführt. Es zeigt sich, dass der Einfluss unterschiedlicher Abhängigkeitsannahmen zu deutlich verschiedenen Portfolioverlustverteilungen führen kann. Ein weiterer Schwachpunkt in den Basel-II-Regularien ist, dass Kreditrisiken, Marktrisiken und Operationelle Risiken additiv miteinander verknüpft sind. Dies bedeutet, dass kein Diversifikationspotential zwischen den Risiken vorhanden ist. Rosenberg und Schuermann (2006) zeigen, dass die additive Verknüpfung das Gesamtrisiko bis zu 40 Prozent überschätzt, die Annahme einer gemeinsamen Normalverteilung die Risiken jedoch um den gleichen Betrag unterschätzt. Sie verwenden stattdessen verschiedene Copulas zur Aggregation der Einzelrisiken.

Ein weiterer Forschungsschwerpunkt im Risikomanagement liegt in der Bewertung von Kreditderivaten. Li (2000) legte den Grundstein zur Bewertung von Kreditderivaten, die multiplen Risikofaktoren unterliegen, z.B. Credit Default Swaps oder CDOs. Kern der Bewertung von Kreditderivaten ist die Modellierung der gemeinsamen Verteilung der Ausfallzeiten. Copulas bieten eine flexible Möglichkeit, verschiedene Abhängigkeiten zu unterstellen. Li (2000) unterstellt eine *Gauss*-Copula zur Modellierung der Ausfallzeitpunkte. Andersen und Sidenius (2005) erweitern den Ansatzes von Li (2000) und schlagen eine Konvexkombination aus *Gauss*-Copulas vor, um verschiedene Korrelationsstrukturen einzubinden. Greenberg et al. (2004), Mashal, Naldi und Zeevi (2003) sowie Schloegl und O’Kane (2005) verwenden statt der *Gauss*-Copula eine *t*-Copula. Unter der Annahme, dass die Risikofaktoren *t*-verteilt sind, zeigen Hull und White (2004), dass die Abhängigkeitsstruktur dann einer doppelten *t*-Copula folgt.⁵

Unterstellt man eine asymmetrische Abhängigkeit zwischen den Ausfallereignissen, können für die Kreditderivatebewertung auch *Archimedische* Copulas verwendet wer-

⁵ Alle genannten Modelle basieren auf der Annahme, dass die Risikofaktoren additiv verknüpft sind. Weitere mögliche Copulas zur Modellierung der Abhängigkeitsstruktur für diese Modelle sind die Normal-Inverse-*Gaussian*-Copula, dargestellt in Guegan und Houdain (2005), die doppelte Normal-Inverse-*Gaussian*-Copula, verwendet von Kalemánova, Schmid und Werner (2007) sowie die doppelte Varianz-Gamma-Copula, die von Moosbrucker (2006) verwendet wird.

den. Beispiele hierzu bieten Rogge und Schönbucher (2003), Totouom und Armstrong (2008) sowie Hofert und Scherer (2010). Unterstellt man ein multivariates Exponentialmodell (auch Schock-Modell genannt) für die Entwicklung der gemeinsamen Ausfallwahrscheinlichkeiten, werden statt der oben genannten Copulas Extremwertcopulas verwendet. Beispiele für Verwendung einer *Marshall-Olkin*-Copula zur Modellierung der gemeinsamen Ausfallwahrscheinlichkeit bieten Lindskog und McNeil (2003), Giesecke (2003) und Veilex (2008).

5.3. Asset Pricing

Copulas finden auch Anwendung bei der Bewertung von originären Derivaten, insbesondere dann, wenn dem Derivat mehrere Basiswerte unterliegen oder mehrere Risikofaktoren vorhanden sind. Beispiele für solche multivariaten Derivate bieten bivariate digitale Optionen, Basketoptionen auf zwei oder mehrere Assets, Tauschoptionen sowie Quantooptionen.

Cherubini und Luciano (2002) zeigen, wie verschiedene Copulas zur Bewertung von Derivaten verwendet werden können und berechnen Preisgrenzen der Derivate unter Anwendung von Copulas. Rosenberg (2003) verwendet ein nicht-parametrisches Verfahren für die Schätzung der risikoneutralen Randverteilungen sowie des Copulaparameters. Zhang und Guégan (2008) sowie van den Goorbergh, Genest und Werker (2005) erweitern die genannten Ansätze in dem sie zeitvariierende Copulas verwenden. Bennett und Kennedy (2004) verwenden zur Bewertung von Quantooptionen einen Copulaansatz und zeigen, dass sich die resultierenden Preise aus den traditionellen Bewertungsverfahren bis zu 15 Prozent von den Preisen ihres Modells unterscheiden. Einen Überblick über verschiedene Derivate und deren Bewertung mittels Copulas liefern Cherubini, Luciano und Vecchiato (2004).

6. Fazit

Wir haben gezeigt, was sich hinter dem Begriff Copula verbirgt und wie Copulas in der Finanzwirtschaft Anwendung finden. Das Copula-Konzept besitzt den analytischen Charme, Abhängigkeitsstruktur und Randverteilungen von mehrdimensionalen Zufallsvariablen unabhängig voneinander zu modellieren. Dies ermöglicht die Verwendung komplexer Schätzverfahren sowohl für die Abhängigkeitsstruktur als auch für die Randverteilungen.

Damit einhergehend ergeben sich jedoch andere Schwierigkeiten. Zunächst muss eine bestimmte Abhängigkeitsstruktur unterstellt werden. Hier bedarf es noch weiterer Forschungsarbeit bezüglich der Entwicklung adäquater Testverfahren. Ein weiterer limitierender Faktor ist die praktische Umsetzung theoretischer Verfahren auf hochdimensionale Problemstellungen und deren Interpretation.

Diesbezüglich sei auf die Diskussion in der Zeitschrift „Extremes“, Vol. 9, Nr. 1, 2006 verwiesen. Hier wird unter Anderem darauf hingewiesen, dass die Anwendung von Copulas mit hohem Aufwand bezüglich der Schätzung der Parameter einhergehen kann. Weiter wird angemerkt, dass Copulas trotz aller Flexibilität ein statisches Modell darstellen, selbst wenn zwischen verschiedenen Zeitpunkten die Copula rekali­briert wird. Ein Ziel zukünftiger Forschung wird deshalb die Verbindung von Copulas mit stochastischen Prozessen sein, um eine dynamische Betrachtung der Abhängigkeitsstruktur zu ermöglichen und so, präzisere Vorhersagen treffen zu können.

Literatur

Andersen, L., Sidenius, J. (2005): Extensions to the Gaussian Copula: Random Recovery and Random Factor Loadings, Journal of Credit Risk, Vol. 1, Nr. 1, S. 29-70.

Bai, M., Sun, L. (2007): Application of Copula and Copula-CVaR in the Multivariate Portfolio Optimization, in: Chen, B., Paterson, M., Zhang, G. (Hrsg.), Combinatorics, Algorithms, Probabilistic and Experimental Methodologies, Heidelberg.

Bennett, M. N., Kennedy, J. E. (2004): Quanto pricing with copulas, Journal of Derivatives, Vol. 12, Nr. 1, S. 26-45.

Cantelli, F.P. (1933): Sulla determinazione empirica delle leggi di probabilità, Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari, Vol. 6, S. 421-424.

Cherubini, U., Luciano, E. (2002): Bivariate option pricing with copulas, Applied Mathematical Finance, Vol. 8, S. 69-85.

Cherubini, U., Luciano, E., Vecchiato, W. (2004): Copula Methods in Finance, Chichester.

Chollete, L., Heinen, A., Valdesogo, A. (2009): Modeling International Financial Returns with a Multivariate Regime-switching Copula, Journal of Financial Econometrics, Vol. 7, Nr. 4, S. 437-480.

Clayton, D. G. (1978): A model for association in bivariate life tables and its application in epidemiological studies of familial tendency in chronic disease incidence, Biometrika, Vol. 65, S. 141-151.

Deheuvels, P. (1979): La fonction de dépendance empirique et ses propriétés. Un test non paramétrique d'indépendance, Académie Royale de Belgique – Bulletin de la Classe des Sciences – 5e Série, Vol. 65, Nr. 5, S. 274-292.

- Durbin, J., Stuart, A.* (1951): Inversions and rank correlation coefficients, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, Vol. 13, Nr. 2, S. 303-309.
- Embrechts, P., McNeil, A. J., Straumann, D.* (1999): Correlation: pitfalls and alternatives, *Risk*, Vol. 12, S. 69-71.
- Frank, M. J.* (1979): On the simultaneous associativity of $F(x,y)$ and $x+y-F(x,y)$, *Aequationes Mathematicae*, Vol. 19, S. 194-226.
- Genest, C., Ghoudi, K., Rivest, L. P.* (1995): A semiparametric estimation procedure for dependence parameters in multivariate families of distributions, *Biometrika*, Vol. 82, S. 543-552.
- Genest, C., MacKay, J.* (1986a): Copules archimédiennes et familles de lois bidimensionnelles dont les marges sont données, *Canadian Journal of Statistics*, Vol. 14, S. 145-159.
- Genest, C., MacKay, J.* (1986b): The joy of copulas: Bivariate distributions with uniform marginals, *American Statistician*, Vol. 40, S. 280-283.
- Giesecke, K.* (2003): A Simple Exponential Model for Dependent Defaults, *Journal of Fixed Income*, Vol. 13, Nr. 3, S. 74-83.
- Glivenko, V. I.* (1933): Sulla determinazione empirica della leggi di probabilità, *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari*, Vol. 4, S. 92-99.
- Greenberg, A, Mashal, R., Naldi, M., Schloegl, L.* (2004): Tuning Correlation and Tail Risk to the Market Prices of Liquid Tranches, *Lehman Brothers Quantitative Credit Research*.
- Guegan, D., Houdain, J.* (2005): Collateralized Debt Obligations pricing and factor models: a new methodology using Normal Inverse Gaussian distributions, *Working Paper, Ecole Normale Supérieure*.

- Gumbel, E. J.* (1960): Bivariate exponential distributions, *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 55, S. 698-707.
- Hatherley, A., Alcock, J.* (2007): Portfolio construction incorporating asymmetric dependence structures: a user's guide, *Accounting and Finance*, Vol. 47, S. 447-472.
- Hennessy, D. A., Lapan, H. E.* (2002): The Use of Archimedean Copulas to Model Portfolio Allocations, *Mathematical Finance*, Vol. 12, Nr. 2, S. 143-154.
- Hoeffding, W.* (1940): Massstabinvariante Korrelationstheorie, *Schriften des Mathematischen Instituts und des Instituts für Angewandte Mathematik der Universität Berlin*, Vol. 5, Nr. 3, S. 179-233, [Neuaufgabe: Scale-invariant correlation theory, in: *Fisher, N. I.; Sen, P.K.* (Hrsg.) (1994): *The Collected Works of Wassily Hoeffding*, S. 57-107, New York].
- Hoeffding, W.* (1941): Massstabinvariante Korrelationsmasse für diskontinuierliche Verteilungen, *Archiv für mathematische Wirtschafts- und Sozialforschung*, Vol. 7, S. 49-70, [Neuaufgabe: Scale-invariant correlation measures for discontinuous distributions, in: *Fisher, N. I.; Sen, P. K.* (Hrsg.) (1994): *The Collected Works of Wassily Hoeffding*, S. 109-133, New York].
- Hofert, M., Scherer, M.* (2010): CDO pricing with nested Archimedean copulas, *Quantitative Finance*, forthcoming.
- Hu, L.* (2006): Dependence patterns across financial markets: a mixed copula approach, *Applied Financial Economics*, Vol. 16, Nr. 10, S. 717-729.
- Hull, J., White, A.* (2004): Valuation of a CDO and an n^{th} to Default CDS without Monte Carlo Simulation, *Journal of Derivatives*, Vol. 14, Nr. 2, S. 8-23.
- Jondeau, E., Rockinger, M.* (2006): The Copula-GARCH model of conditional dependencies: An international stock market application, *Journal of International Money and Finance*, Vol. 25, S. 827-853.

- Kalemanova, A., Schmid, B., Werner, R.* (2007): The Normal Inverse Gaussian distribution for synthetic CDO pricing, *Journal of Derivatives*, Vol. 14, Nr. 3, S. 80-94.
- Kim, G., Silvapulle, M. J., Silvapulle, P.* (2007): Comparison of semiparametric and parametric methods of estimating copulas, *Computational Statistics & Data Analysis*, Vol. 51, S. 2836-2850.
- Lee, T.-H., Long, X.* (2009): Copula-based multivariate GARCH model with uncorrelated dependent errors, *Journal of Econometrics*, Vol. 150, S. 207-218.
- Li, D. X.* (2000): On default correlation: a copula function approach, *Journal of Fixed Income*, Vol. 9, S. 43-54.
- Li, D. X., Mikusinski, P., Sherwood, H., Taylor, M. D.* (1997): On approximation of copulas, in: *Benes, V., Stephan, J.* (Hrsg.), *Distributions with Given Marginals and Moments Problems*, Boston.
- Li, D. X., Mikusinski, P., Taylor, M. D.* (1998): Strong approximation of Copulas, *Journal of Mathematical Analysis & Applications*, Vol. 225, S. 608–623.
- Lindskog, F., McNeil, A. J.* (2003): Common Poisson Shock Models: Applications to Insurance and Credit Risk Modelling, *Astin Bulletin*, Vol. 33, Nr. 2, S. 209-238.
- Ling, C. H.* (1965): Representation of associative functions, *Publicationes Mathematicae Debrecen*, Vol. 12, S. 189-212.
- Malvergne, Y., Sornette, D.* (2006): *Extreme Financial Risks – From Dependence to Risk Management*, New York.
- Markowitz, H.* (1952): Portfolio selection, *Journal of Finance*, Vol. 7, S. 77-91.
- Marshall, A., Olkin, I.* (1967): A Multivariate Exponential Distribution, *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 62, S. 30-44.

- Mashal, R, Naldi, M., Zeevi, A. (2003): The Dependence Structure of Asset Returns, Risk, S. 83-87.*
- Merton, R. C. (1974): On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates, Journal of Finance, Vol. 29, S. 449-470.*
- Min, A., Czado, C. (2010): Bayesian Inference for Multivariate Copulas Using Pair-Copula Constructions, Journal of Financial Econometrics, forthcoming.*
- Moosbrucker, T. (2006): Pricing CDOs with Correlated Variance Gamma Distributions, Working Paper, Universität Köln.*
- Nelsen, R. B. (2006): An Introduction to Copulas, 2. Aufl., New York.*
- Okimoto, T. (2008): New Evidence of Asymmetric Dependence Structures in International Equity Markets, Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 43, Nr. 3, S. 787-815.*
- Patton, A. J. (2004): On the Out-of-Sample Importance of Skewness and Asymmetric Dependence for Asset Allocation, Journal of Financial Econometrics, Vol. 2, Nr. 1, S. 130-168.*
- Patton, A. J. (2006): Modelling Asymmetric Exchange Rate Dependence, International Economic Review, Vol. 47, Nr. 2, S. 527-556.*
- Rockafellar, R. T., Uryasev, S. (2000): Optimization of conditional Value-at-Risk, Journal of Risk, Vol. 2, S. 21-41.*
- Rogge, E., Schönbucher, P. (2003): Modelling Dynamic Portfolio Credit Risk, Working Paper, ETH Zürich.*
- Rosenberg, J. V. (2003): Nonparametric pricing of multivariate contingent claims, Journal of Derivatives, Vol. 10, Nr. 3, S. 9-26.*

- Rosenberg, J. V., Schuermann, T. (2006):* A general approach to integrated risk management with skewed, fat-tailed risks, *Journal of Financial Economics*, Vol. 79, S. 569-614.
- Sato, K. (1999):* Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions, Cambridge.
- Schloegl, L., O’Kane, D. (2005):* A note on the large homogeneous portfolio approximation with the Student-t copula, *Finance and Stochastics*, Vol. 9, Nr. 4, S. 577-584.
- Schönbucher, P. J. (2002):* Taken to the limit: Simple and not-so-simple loan loss distributions, Working Paper, Universität Bonn.
- Sklar, A. (1959):* Fonctions de repartition à n dimensions et leurs marges, *Publications de l’Institut de Statistique de l’Université de Paris*, Vol. 8, S. 229-231.
- Sun, W., Rachev, S., Stoyanov, S. V., Fabozzi, F. J. (2008):* Multivariate Skewed Student’s t Copula in the Analysis of Nonlinear and Asymmetric Dependence in the German Equity Market, *Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics*, Vol. 12, Nr. 2, S. 1-35.
- Totouom, D., Armstrong, M. (2008):* Credit risk dependence modeling with dynamic copula: an application to CDO tranches, *Advances in Econometrics: Econometrics and Risk Management*, Vol. 22, S. 85-102.
- van den Goorbergh, R. W. J., Genest, C., Werker, B. J. M. (2005):* Bivariate option pricing using dynamic copula models, *Insurance, Mathematics and Economics*, Vol. 37, S. 101-114.
- Vasicek, O. (1987):* Probability of loss on loan portfolio, Working Paper, KMV Corporation.
- Veilex, L. (2008):* CDO Loss-Term-structure Expansions in a Fatal-Shock Framework, Working Paper, Credit Suisse.

Verschiedene Autoren (2006): Discussion of “Copulas: Tales and facts”, *Extremes*, Vol. 9, Nr. 1, S. 1-86.

Zhang, J., Guégan, D. (2008): Pricing bivariate option under GARCH processes with time-varying copula, *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 42, S. 1095-1103.

Otto von Guericke University Magdeburg
Faculty of Economics and Management
P.O. Box 4120 | 39016 Magdeburg | Germany

Tel.: +49 (0) 3 91/67-1 85 84
Fax: +49 (0) 3 91/67-1 21 20

www.wv.uni-magdeburg.de