

Spektralanalytische Lebensdauerberechnung für stochastisch beanspruchte Bauteile

D. Joensson

1. Einleitung

Bereits seit mehreren Jahren gibt es Bemühungen, für die Lebensdauerberechnung regellos schwingend beanspruchter Bauteile die Spektralanalyse der Beanspruchungs-Zeit-Funktion zu nutzen. Theoretisch sind dem scheinbar keine Grenzen gesetzt, weil der Informationsgehalt im Zeit- und Frequenzbereich der gleiche ist.

Speziell bei der Berücksichtigung von Schadensakkumulation tritt aber die Schwierigkeit auf, daß zusätzlich die Häufigkeitsverteilung der Amplituden Eingang in die Berechnung finden muß, weil sie wesentlich stärker die Lebensdauer beeinflusst als Frequenzverschiebungen der harmonischen Anteile. Der Aufbau einer geeigneten Amplitudenverteilung bedarf jedoch einer Reihe von Annahmen und Voraussetzungen, die mit der Zuordnung von Beanspruchungszyklen beginnt.

In [1] wurde ein alternatives Verfahren vorgeschlagen, das auf der spektralanalytischen Verarbeitung der Momentanwerte ohne Zuordnung bestimmter Beanspruchungs-Zyklen beruht und dabei gleichzeitig die Schädigungswirkung beliebiger Amplitudenverteilungen berücksichtigt.

Im vorliegenden Bericht wird dieses Verfahren auf regellose Beanspruchungs-Zeit-Verläufe unter Beachtung der Besonderheiten digitaler Signalanalyse stochastischer Funktionen angewendet.

2. Stochastische Beanspruchungs-Zeit-Funktionen

Im Unterschied zu einer deterministischen Funktion $x(t)$ besteht eine stochastische Funktion $X(t)$ aus beliebig vielen Realisierungen $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, Bild 1.

Für jeden gegebenen Zeitpunkt t_1, t_2, \dots, t_n wird der stochastische Prozeß $X(t)$ durch Zufallsvariable $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ gekennzeichnet, die eine n -dimensionale Verbundwahrscheinlichkeitsverteilung F_n [2] besitzen:

$$F_n(x_i, t_i)_{i=1}^n = P[X(t_1) \leq x_1 \cap (X(t_2) \leq x_2 \cap \dots \cap (X(t_n) \leq x_n)] \quad (1)$$

Sie gibt die gemeinsame Wahrscheinlichkeit P dafür an, daß die zum Prozeß gehörenden Zufallsvariablen X zu den Zeitpunkten t_i jeweils kleiner oder gleich den vorgegebenen Werten x_i sind.

Die Verteilungsfunktion F_n steht in folgendem Zusammenhang zur Verbundwahrscheinlichkeitsdichte f_n :

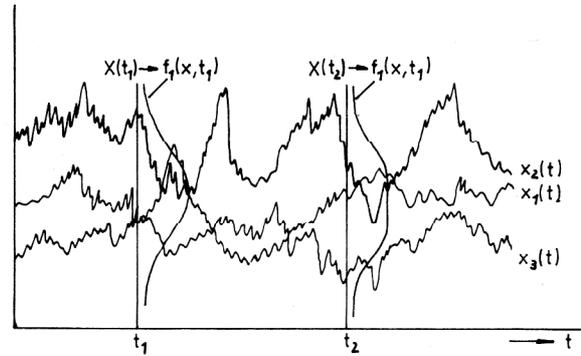


Bild 1
Stochastische Funktion $X(t)$

$$f_n(x_i, t_i)_{i=1}^n = \frac{\partial^n F(x_i, t_i)_{i=1}^n}{\prod_{i=1}^n \partial x_i} \quad (2)$$

Für praktische Analysen stochastischer Prozesse ist es oft einfacher, die Zufallsvariablen durch spezielle Erwartungswerte – die statistischen Momente – zu charakterisieren. Diese Momente entstehen aus Integrationen über die Dichtefunktion:

$$E \left\{ \prod_{i=1}^n X_n(t_n) \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left[\prod_{i=1}^n x_i \right] \cdot f_n(x_i, t_i)_{i=1}^n dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (3)$$

mit $E \{ \dots \}$: Integraloperator zur Erwartungswertbildung
Besondere Bedeutung haben dabei das Moment 1. Ordnung (Mittelwertfunktion):

$$E \{ X(t) \} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_1(x, t) dt \quad (4)$$

und das Moment 2. Ordnung (Autokorrelationsfunktion):

$$E \{ X(t_1) \cdot X(t_2) \} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \cdot x_2 \cdot f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \quad (5)$$

Unter folgenden Voraussetzungen wird die mathematische Handhabung stochastischer Funktionen entscheidend erleichtert: Durch Stationarität und Ergodizität.

a) Stationarität

In diesem Fall sind die Dichtefunktionen und damit die Momente invariant bezüglich eines Zeit-Nullpunktes.

Daraus folgt z. B., daß die eindimensionale Dichtefunktion f_1 zeitunabhängig ist. Gleichung (4) und (5) vereinfachen sich zu:

$$\mu_x = E\{X(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \cdot f_1(x) dx = \text{const.} \quad (6)$$

$$K_x(\tau) = E\{X(t_1) \cdot X(t_1 + \tau)\} \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \cdot x_2 \cdot f_2(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2 \quad (7)$$

Die Autokorrelationsfunktion ist jetzt nur noch von der Zeitdifferenz $\tau = t_2 - t_1$ abhängig. Für $\tau = 0$ entsteht daraus der quadratische Mittelwert, der für zentrierte Funktionen mit der Dispersion des Prozesses identisch ist. Außerdem gelten für stationäre Prozesse die Wiener-Chintschin-Relationen [2]:

$$\tilde{S}_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} \cdot K_x(\tau) d\tau \quad (8)$$

und

$$K_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{+j\omega\tau} \cdot S_x(\omega) d\omega \quad (9)$$

mit $\omega = 2\pi f$: Kreisfrequenz und $j = \sqrt{-1}$.

Die Autokorrelationsfunktion kann demnach durch die Spektraldichte $\tilde{S}_x(\omega)$ im Frequenzbereich ersetzt werden. Somit ist ein stationärer Prozeß vollständig durch seine Spektraldichte beschreibbar, wenn man sich auf die Korrelationstheorie beschränkt, die nur die ersten beiden Momente berücksichtigt.

b) Ergodizität

Bei einem stationären ergodischen Prozeß enthält eine einzige, zufällig ausgewählte Realisierung $x_1(t)$ die gesamte Information über die Wahrscheinlichkeitseigenschaften dieses Prozesses. Folglich kann die Erwartungswertbildung über alle Realisierungen (Ensemble-Mittelung) durch eine zeitliche Mittelung über diese eine Realisierung ersetzt werden:

$$\mu_x = E\{X(t)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_1(t) dt \quad (10)$$

$$K_x(\tau) = E\{X(t_1) \cdot X(t_1 + \tau)\} \\ = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x_1(t) - \mu_x] \cdot [x_1(t+\tau) - \mu_x] dt \quad (11)$$

usw.

Gerade diese Eigenschaft rechtfertigt überhaupt erst die praktische Analyse stochastischer Beanspruchungs-Zeit-Funktionen durch die Verarbeitung einer Realisierung. Jedoch ist der Nachweis der Ergodizität nur schwer zu erbringen. Im allgemeinen wird an der einen ausgewählten Realisierung die Stationarität durch Vergleich der statistischen Parameter nach unterschiedlichen Zeitschnitten geprüft und Ergodizität vorausgesetzt, solange kein Widerspruch zu erwarten ist.

3. Der stationäre ergodische Gaußprozeß

Bei diesem Prozeß sind die Zufallsvariablen X_1, X_2, \dots, X_n nach n-dimensionalen Gauß'schen Wahrscheinlichkeitsdichten verteilt. Dadurch lassen sich alle Parameter dieser Verteilungen vollständig aus der zweidimensionalen Gauß'schen Dichtefunktion ableiten bzw. aus der Autokorrelationsfunktion oder der Spektraldichte.

Die Momentanwerte des Prozesses sind normalverteilt, d. h., die eindimensionale Dichtefunktion der momentanen Beanspruchungswerte $\sigma(t)$ lautet:

$$f_1(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_{\text{eff}}^2} \cdot e^{-\frac{\sigma^2}{2\sigma_{\text{eff}}^2}} \quad (12)$$

mit σ_{eff} : Effektivwert der zentrierten Beanspruchungs-Zeit-Funktion. Im Unterschied dazu sind die Maxima $\hat{\sigma}$ Rice-verteilt [3], [4]:

$$f_1(\hat{\sigma}) = \sqrt{\frac{1-i^2}{2\pi\sigma_{\text{eff}}^2}} \cdot e^{-\frac{\hat{\sigma}^2}{2\sigma_{\text{eff}}^2(1-i^2)}} \\ + i \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sigma_{\text{eff}}^2} \cdot e^{-\frac{\hat{\sigma}^2}{2\sigma_{\text{eff}}^2}} \cdot \Phi(\lambda) \quad (13)$$

mit

$$\Phi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\lambda} e^{-\frac{h^2}{2}} dh$$

$$\lambda = \frac{i \cdot \hat{\sigma}}{\sigma_{\text{eff}} \sqrt{1-i^2}}$$

und i : Regellosigkeitskoeffizient als Quotient aus der Anzahl n_0 positiver Nulldurchgänge und Anzahl n_1 der Maxima $\hat{\sigma}$:

$$i = \frac{n_0}{n_1} \quad (14)$$

Die Dichtefunktion der Minima $f_1(\check{\sigma})$ stellt eine gegen den Erwartungswert gespiegelte Funktion $f_1(\hat{\sigma})$ der Maxima dar.

Kowalewski [5] und Sjöström [6] haben, von den Rice-Ergebnissen ausgehend, unabhängig voneinander eine spezielle zweidimensionale Dichtefunktion der Amplituden σ_a und zugehöriger Mittelspannungen σ_m , Bild 2, hergeleitet:

$$f_2(\sigma_m, \sigma_a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot S_m} \cdot e^{-\frac{\sigma_m^2}{2S_m}} \cdot \frac{\sigma_a}{S_a} \cdot e^{-\frac{\sigma_a^2}{2S_a}} \quad (15)$$

mit S_m : Streuung der Mittelspannungen: $S_m = \sigma_{\text{eff}}^2(1-i^2)$

und S_a : Streuung der Amplituden: $S_a = i^2 \sigma_{\text{eff}}^2$

Gleichung (15) entstand unter Voraussetzung statistischer Unabhängigkeit zwischen σ_a und σ_m , das heißt

$$f_2(\sigma_m, \sigma_a) = f_1(\sigma_m) \cdot f_1(\sigma_a) .$$

Dabei stellt $f_1(\sigma_m)$ eine Normalverteilung und $f_1(\sigma_a)$ eine Rayleighverteilung dar.

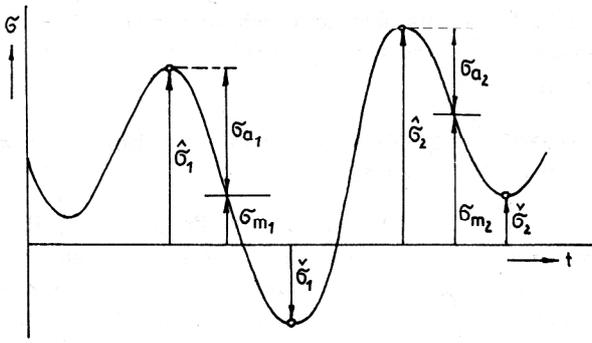


Bild 2
Beanspruchungs-Zyklus, charakterisiert durch Maximum $\hat{\sigma}$ und Minimum $\check{\sigma}$ oder durch Amplitude σ_a und Mittelspannung σ_m

Gleichung (15) kann zur gezielten Erzeugung Gauß'scher Beanspruchungs-Zeit-Prozesse eingesetzt werden, bei denen der Regellosigkeitskoeffizient i als Parameter vorgegeben wird.

4. Lebensdauerberechnung für stationäre ergodische Gaußprozesse

Gemeinsamer Grundtyp für verschiedene Ansätze zu einer durchgängigen Berechnung ist die erstmalig von Miles [7] vorgeschlagene Formel:

$$\sigma_r = \Gamma\left(\frac{\varphi}{2} + 1\right)^{\frac{1}{\varphi}} \cdot \sqrt{2} \sigma_{\text{eff}} \quad (16)$$

mit Γ : Gammafunktion, φ : Wöhlerlinienexponent, σ_{eff} : Effektivwert, und σ_r : reduzierte Spannung, bei der die Lebensdauer N_{M_i} nach Miles eintritt:

$$N_{M_i} = K_W \cdot \sigma_r^{-\varphi} \quad (17)$$

Gleichung (17) repräsentiert die Geradengleichung der Wöhlerlinie in doppeltlogarithmischer Darstellung mit K_W als Wöhlerlinienkonstante. Durch Einsetzen von (16) in (17) folgt die Miles'sche Lebensdauer:

$$N_{M_i} = \frac{K_W}{\Gamma\left(\frac{\varphi}{2} + 1\right) \cdot 2^{\frac{\varphi}{2}} \cdot \sigma_{\text{eff}}^{\varphi}} \quad (18)$$

Ausgangspunkt dieser Gleichung ist die Annahme linearer Schädigungszunahme nach Palmgren/Miner ohne Berücksichtigung der Dauerfestigkeit:

$$N_M = \frac{\sum_{k=1}^m n_k}{\sum_{k=1}^m \frac{n_k}{N_k}} \quad (19)$$

mit N_M : Lebensdauer nach Palmgren/Miner (bzw. Corten/Dolan linearisiert)

n_k : aufgebrachte Schwingspiele der Stufe k

N_k : ertragbare Schwingspiele dieser Stufe

m : Anzahl der Stufen einer Teilfolge

Die Summen wurden von Miles [7] durch Integrale über die Häufigkeitsdichte $p_1(\hat{\sigma})$ der Maxima $\hat{\sigma}$ ersetzt:

$$\sum_{k=1}^m n_k = \int_0^{\infty} p_1(\hat{\sigma}) d\hat{\sigma} \quad (20)$$

$$\sum_{k=1}^m \frac{n_k}{N_k} = \frac{1}{K_W} \int_0^{\infty} \hat{\sigma}^{\varphi} \cdot p_1(\hat{\sigma}) d\hat{\sigma} \quad (21)$$

mit $N_k = K_W \cdot \sigma_k^{-\varphi}$ und $\hat{\sigma} = \sigma_k$.

Die Häufigkeitsdichte ist lediglich durch den Faktor n_1 mit der Wahrscheinlichkeitsdichte verknüpft:

$$p_1(\hat{\sigma}) = n_1 \cdot f_1(\hat{\sigma}) \quad (22)$$

Außerdem wird eine Regellosigkeit $i = 1$ vorausgesetzt, also ein *Schmalbandprozeß*. Nur dann geht die Rice-Verteilung (13) in eine *Rayleigh-Verteilung* der Maxima über:

$$f_1(\hat{\sigma}) = \frac{\hat{\sigma}}{\sigma_{\text{eff}}^2} \cdot e^{-\frac{\hat{\sigma}^2}{2\sigma_{\text{eff}}^2}} \quad (23)$$

Mit den Gleichungen (23), (20), (21) und (22) folgt daraus für Gleichung (19):

$$N_M = \frac{K_W \cdot \int_0^{\infty} \hat{\sigma} \cdot e^{-\frac{\hat{\sigma}^2}{2\sigma_{\text{eff}}^2}} d\hat{\sigma}}{\int_0^{\infty} \hat{\sigma}^{\varphi+1} \cdot e^{-\frac{\hat{\sigma}^2}{2\sigma_{\text{eff}}^2}} d\hat{\sigma}} \quad (24)$$

Miles [7] hat den Quotienten (24) wesentlich vereinfacht, indem er die Integrale durch die Gammafunktion ersetzte:

$$\Gamma(z+1) = 2^{-z} \int_0^{\infty} x^{2z+1} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (25)$$

Dadurch entsteht direkt Gleichung (18). Die Miles'sche Formel stellt somit die Anwendung der Palmgren/Miner-Formel (ohne Dauerfestigkeit) auf einen stationären ergodischen *schmalbandigen* Gaußprozeß dar. Es läßt sich zeigen, daß verschiedene andere Ansätze [8] bis [10] für Grenzfälle auf die Miles'sche Gleichung (18) zurückführen.

Zur Bestimmung des Effektivwertes in Gleichung (18) kann die Spektralanalyse der Beanspruchungs-Zeit-Funktion verwendet werden, indem mit Hilfe der Fouriertransformation die Spektraldichte $\tilde{S}(\omega)$ ermittelt wird. Die Integration über alle Frequenzen liefert dann den Effektivwert:

$$\sigma_{\text{eff}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{S}(\omega) d\omega \quad (26)$$

Die Anwendung der Miles'schen Formel auf Gauß'sche Breitbandprozesse [9] bis [13] ist mit zusätzlichen Idealisierungen und einem deutlich erhöhten Aufwand verbunden.

5. Lebensdauerberechnung für beliebige stationäre ergodische Prozesse

Ein Verfahren, das keine Forderungen an die Verteilungsfunktion der Momentanwerte bzw. Spitzenwerte stellt, ist in [1] vorgeschlagen worden.

Die Lebensdauer wird dabei aus dem quadratischen Mittelwert ΔD^2 der Schädigungsgradienten aller Amplituden berechnet:

$$N_L = \frac{1}{\Delta D^2} \quad (27)$$

Für schmalbandige Prozesse mit beliebiger Verteilung kann Gleichung (27) in Anlehnung an die Schreibweise der Gleichung (19) auch in folgender Form geschrieben werden [14]:

$$N_L = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^m n_k}{\sum_{k=1}^m \frac{n_k}{N_k^2}}} \quad (28)$$

Für nicht-schmalbandige Beanspruchung wird der quadratische Mittelwert in (27) durch den Effektivwert ΔD_{eff} der momentanen Schädigungsgradienten beschrieben:

$$N_L = \frac{1}{u(\varphi) \cdot \Delta D_{\text{eff}}} \quad (29)$$

Die Aufspaltung des Effektivwertes in seine spektralen Leistungsanteile und die Zerlegung der ertragbaren Schwingspiele N_L in Zeit und Frequenz liefert die Lebensdauerzeit T_L [1]:

$$T_L = \frac{1}{u(\varphi) \cdot \sqrt{\int_0^\infty \tilde{G}_{\Delta D}(f) \cdot f^2 df}} \quad (30)$$

bzw. in numerischer Form für eine digitalisierte Beanspruchungs-Zeit-Funktion:

$$T_L = \frac{1}{u(\varphi) \cdot \sqrt{\sum_{l=1}^p G_{\Delta D_1}(f_l) \cdot f_l^2}} \quad (31)$$

Die diskreten einseitigen Spektralleistungen $G_{\Delta D_1}$ der Frequenzen f_l sind rationell durch EDV-Programme mit schneller Fouriertransformation aus der digitalisierten Schädigungsgradienten-Zeit-Funktion ermittelbar. Das zur Lebensdauerberechnung nach Gleichung (31) geschriebene FORTRAN-Programm SLEBE1 [1] verwendet Blöcke mit maximal 2048 Zeit-Meßwerten und mittelt arithmetisch die Spektralleistungen hintereinander liegender Blöcke. Dadurch lassen sich möglichst viele Beanspruchungs-Zeit-Werte verarbeiten, um die Ensemble-Erwartungswerte im Sinne der Ergodizität durch zeitliche Mittelungen ersetzen zu können.

Bei der Anwendung der Gleichung (31) auf nicht-deterministische Beanspruchungsverläufe ist zu beachten, daß die berechneten Spektralwerte Schätzungen darstellen, die unter Voraussetzung der Stationarität und Ergodizi-

tät mit zunehmender Werteanzahl genauer werden. Die Unschärfe hieraus überlagert sich zu der aus Abbruchfehlern resultierenden Unschärfe digital ermittelter Spektralwerte.

6. Anwendung der verteilungsfreien Berechnung auf Gauß-Prozesse

Zu diesem Zweck wurden mit dem Programm SLEBE1 Beanspruchungs-Zeit-Funktionen analysiert, für die Lange [15] experimentelle Untersuchungen an gekerbten Rundproben aus St 38 auf einer prozessrechnergesteuerten Schenk-Hydropulsanlage durchgeführt hatte. Lange hat die Sollwertverläufe der regellosen Beanspruchungen mit dem Programm GAUS 20 [16] erzeugt. Die Extremwerte wurden dann mit konstanter Frequenz (Pseudo-Zufallsprozeß) dem Hydropuls-Zylinder vom Prozeßrechner vorgegeben. Das Programm GAUS 20 stellt eine Realisierung des Gauß'schen Prozesses als Extremwertfolge auf der Basis der Gleichung (15) mit Hilfe zweier Zufallsgeneratoren so her, daß die Rice-Verteilung der Maxima und Minima gewährleistet ist.

Einige der von Lange verwendeten regellosen Beanspruchungsverläufe wurden für die Eingabe in SLEBE1 noch einmal digital mit dem Programm GAUS 20 rekonstruiert und die Extremwertfolge auf der Magnetplatte abgelegt. Es handelt sich dabei um die in Bild 3 dargestellten drei Prozesse mit den Regellosigkeitskoeffizien-

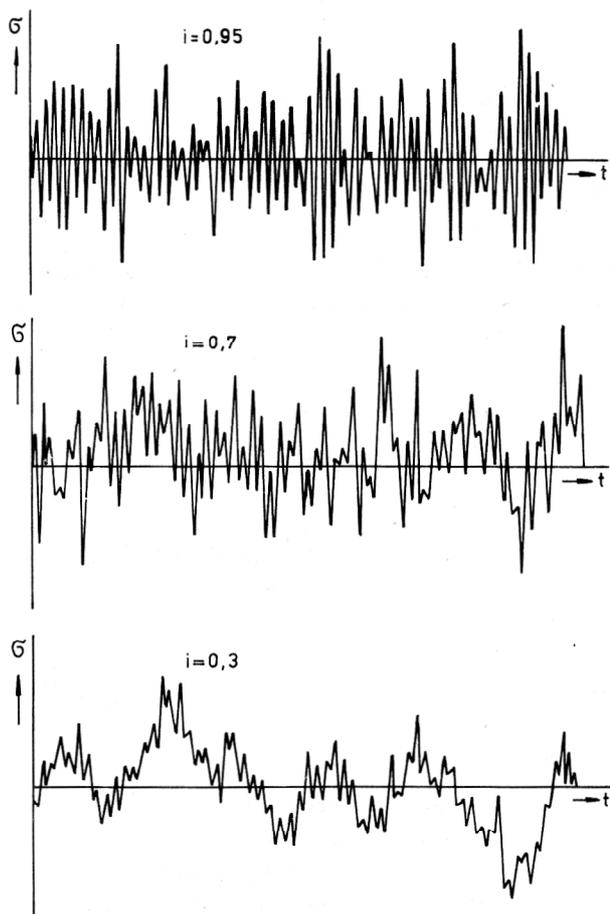


Bild 3

Für die Lebensdauerberechnung verwendete Beanspruchungs-Zeit-Funktionen

Tabelle 1: Vergleich experimenteller und berechneter Lebensdauerwerte

i	$\hat{\sigma}_{\max}$	T_L mit Fensterfunktionen				Bemerkung	$T_{Exp.}$
		ohne	Bartlett	Hanning	Hamming		
0,95	220 MPa	26481 s	23655 s	22940 s	24047 s	u = 2,06	47467 s
		44135 s	39425 s	38233 s	40079 s	: 0,6	
		1,08	1,20	1,23	1,18	S	
	150	174316 s	157324 s	149038 s	155161 s	u = 2,06	
		290526 s	262206 s	248396 s	258602 s	: 0,6	
		1,10	1,22	1,29	1,24	S	
0,7	220	31045 s	32350 s	30678 s	31901 s	u = 2,06	38733 s
		51742 s	53917 s	51130 s	53168 s	: 0,6	
		0,75	0,72	0,76	0,73	S	
	150	234968 s	167018 s	158332 s	168037 s	u = 2,06	
		391614 s	278363 s	263887 s	280061 s	: 0,6	
		0,64	0,91	0,96	0,90	S	
0,3	220	140401 s	99857 s	93304 s	99294 s	u = 2,06	215093 s
		234002 s	166428 s	155506 s	165490 s	: 0,6	
		0,92	1,29	1,38	1,30	S	
	180	377838 s	259385 s	241329 s	257721 s	u = 2,06	
		629730 s	432309 s	402214 s	429535 s	: 0,6	
		0,71	1,04	1,11	1,04	S	
z. B. S = 0,71 = $\frac{447773}{629730}$							

ten $i = 0,95$, $i = 0,7$ und $i = 0,3$. Für diese drei Verläufe gilt hier:

- konstante Frequenz $f_0 = 15$ Hz
- Crestfaktor $C = \hat{\sigma}_{\max}/\sigma_{eff} = 3,7$
- Sequenzlänge $N_S = 240\ 000$ Schwingspiele

Durch Vorgabe bestimmter Effektivwerte σ_{eff} erfolgte über den Crestfaktor die Variation verschiedener Kollektivgrößtwerte $\hat{\sigma}_{\max}$ als Spannungshorizonte für die Lebensdauerlinien, siehe Tabelle 1. Es gilt die Wöhlerliniengleichung

$$N(\sigma) = 1,27 \cdot 10^{17} \cdot \sigma^{-5,42} \quad (32)$$

für 50 % Bruchwahrscheinlichkeit.

Die Nachrechnung der experimentellen Lebensdauer mit SLEBEL wurde durch den Umstand erschwert, daß

nur ein Teil der Sequenzlänge von 480 000 Extremwerten auf der Magnetplatte abgelegt werden konnte. Konkret können maximal je 32 767 Werte auf die Platte übertragen werden [16].

Deshalb mußte zunächst durch Klassierung der Maxima und Minima getestet werden, ob durch die wesentlich geringere Anzahl der abgespeicherten Extremwerte bereits die Rice-Verteilung der vollständigen Sequenzlänge gewährleistet ist. Als Beispiele sind die relativen Summenhäufigkeiten der Maxima für $i = 0,3$ und $i = 0,95$ im Bild 4 dargestellt. Um die Wirkung der scheinbar geringen Abweichungen zwischen den Verteilungsfunktionen für 480 000 und für 32 000 Extremwerte auf die Lebensdauer quantitativ abzuschätzen, wurde jeweils die Häufigkeitsdichte der positiven Maxima abgeleitet

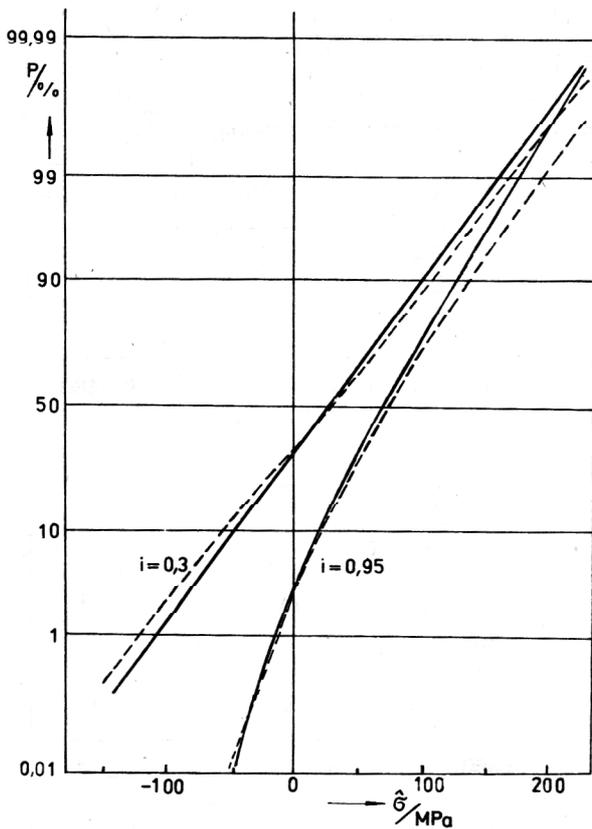


Bild 4
Verteilungsfunktionen $F_1(\hat{\sigma})$ der Maxima
(— 480000 Extremwerte, - - - 32000 Extremwerte)

und eine lineare Schadensberechnung nach Corten-Dolan durchgeführt. Diese näherungsweise Berechnung ergab folgende Verkürzung der Lebensdauer für die geringere Extremwertanzahl gegenüber der vollständigen Sequenzlänge: $i = 0,95 : 56 \%$, $i = 0,7 : 46 \%$ und $i = 0,3 : 71 \%$, also im Mittel 60% . Deshalb wurden die auf der Basis der geringeren Extremwertanzahl mit SLEBE1 berechneten Lebensdauerwerte einheitlich durch $0,6$ dividiert, siehe Tabelle 1.

Durch ein spezielles EDV-Programm erfolgte die Zuordnung von 5 Momentanwerten zu je einem Extremwert bzw. sinusförmigem Halbschwingspiel auf der Magnetplatte.

Außerdem wurde nur mit 20 000 Extremwerten, d. h. 100 000 Momentanwerten, gearbeitet. Die Verteilungsfunktionen der 32 000 und der 20 000 Extremwerte waren nahezu identisch, so daß auch hier der Faktor $0,6$ beibehalten werden konnte. Die Ergebnisse der Berechnung mit SLEBE1 für je 100 000 Momentanwerte sind in Tabelle 1 enthalten. Dabei kamen einfache Fensterfunktionen nach Bartlett, Hanning und Hamming [17], [14] zur Anwendung. Der Faktor u in Gleichung (31) hat für den Wöhlerlinienexponenten $\varphi = 5,42$ nach Gleichung (32) den Wert $2,06$ [14]. Erst nach Division durch $0,6$ wurden die Schadenssummen S als Verhältnis der experimentellen zur berechneten Lebensdauer ermittelt.

Wertet man die 6 Schadenssummen jeweils einer Spalte in Tabelle 1 unter Annahme logarithmischer Normalverteilung nach der Momentenmethode aus, so entsteht

z. B. für die Hanning-Fensterfunktion ein Median der Schadenssumme $S_{50} = 1,10$ und eine Streuspanne $T_S = S_{90}/S_{10} = 1,76$. Im Bild 5 sind die berechneten Werte (Hanning-Fenster) den experimentell ermittelten Werten gegenübergestellt.

Bild 5 enthält außerdem zwei analytisch berechnete Lebensdauerlinien für die theoretische Regellosigkeit $i = 1,0$. Dabei wurde die Linie 7 nach Gleichung (18) bestimmt.

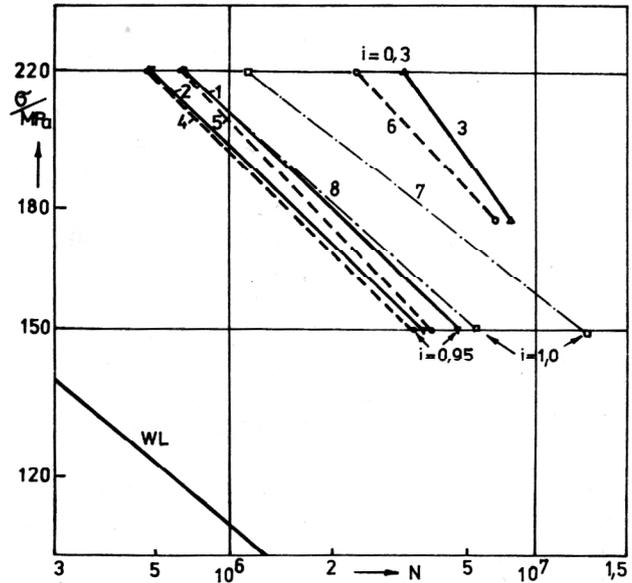


Bild 5
Wöhlerlinie (WL); experimentelle Lebensdauerlinien (1) $i = 0,95$, (2) $i = 0,7$, (3) $i = 0,3$;
numerisch berechnet mit SLEBE1: (4) $i = 0,95$, (5) $i = 0,7$, (6) $i = 0,3$;
analytisch berechnet für $i = 1,0$;
(7) nach Miles, (8) nach Gleichung 33

Der Linie 8 liegt eine analytische Formulierung der verteilungsfreien Lebensdauerberechnung speziell für schmalbandige Gaußprozesse zugrunde. Zu diesem Zweck wurden die Summen in Gleichung (28) analog zu Miles durch Integrale über die Rayleigh-Häufigkeitsdichte der Maxima ersetzt und wieder die Gammafunktion zur Beschreibung dieser Integrale genutzt. Als Ergebnis entsteht aus Gleichung (28) folgende Formel für den Sonderfall Gaußprozeß:

$$N_L = \frac{K_W}{\sqrt{\Gamma(\varphi+1)} \cdot 2^{\frac{\varphi}{2}} \cdot \sigma_{\text{eff}}^{\varphi}} \leq N_{M_i} \quad (33)$$

K_W und φ sind wieder aus der Wöhlerlinie (32) zu entnehmen, und σ_{eff} ergibt sich über den Crestfaktor durch die Vorgabe des Spannungshorizontes $\hat{\sigma}_{\text{max}}$.

7. Zusammenfassung

Die Anwendung der verteilungsfreien spektralanalytischen Lebensdauerberechnung auf die vorgestellten Gauß'schen Pseudo-Zufallsprozesse zeigt eine gute Übereinstimmung zu den experimentell ermittelten Lebensdauerwerten. Dabei wurde berücksichtigt, daß nur ein

begrenzter Zeitabschnitt jedes Prozesses digital verarbeitet werden konnte. Die verwendeten Prozessabschnitte besitzen Häufigkeitsfunktionen, die eine um 60 % kleinere Lebensdauer gegenüber den tatsächlich experimentell eingesetzten Prozessen liefern. Deshalb wurden die mit dem EDV-Programm berechneten Lebensdauerwerte abschließend durch 0,6 dividiert.

Die Ergebnisse verdeutlichen noch einmal den in [1] und [14] erläuterten Sachverhalt: Verteilungsfreie Ermittlung der Lebensdauer heißt nicht, daß die Amplituden-Häufigkeitsfunktion keinen Einfluß hat, sondern daß diese für die Lebensdauer maßgebliche Funktion bei Anwendung des verteilungsfreien Verfahrens nicht explizit formuliert werden muß.

Um die Wirkung der Häufigkeitsfunktion des gesamten Prozesses in guter Näherung zu erfassen, ist für *regellose* Beanspruchung die Spektralanalyse möglichst vieler Werte erforderlich. Diese Forderung ist gleichzeitig im Sinne der Ergodizität, weil nur für $T \rightarrow \infty$ die Ensemble-Erwartungswerte aller Realisierungen durch Zeit-Mittelungen der einen Realisierung ersetzbar sind.

Die verteilungsfreie spektralanalytische Lebensdauerberechnung ist ebenso problemlos auf *regellose* wie auf periodische [1], [14] oder harmonische [14] Beanspruchungen anwendbar. Jedoch ist hier die Güte der Berechnung stärker von der Verarbeitung einer großen Werteanzahl abhängig als bei den deterministischen Funktionen [18].

LITERATUR

- [1] Joensson, D.: Verteilungsfreie spektralanalytische Lebensdauerberechnung. *Techn. Mechanik*, 7 (1986) 1, S. 59 – 66.
- [2] Heinrich, W.; Hennig, K.: *Zufallsschwingungen mechanischer Systeme*. Akademie-Verlag Berlin 1977.
- [3] Rice, S. D.: *Mathematical analysis of random noise*. Bell System Techn. Journal Vol. 23–24. In: *Noise and stochastic processes*, Editor M. Max, Dover publications, New York 1954.
- [4] Kowalewski, J.: Beschreibung *regelloser Vorgänge*. Lebensdaueranalyse bei unregelmäßig schwankender Belastung. VDI-Z., Fortschritt-Berichte, Reihe 5, Nr. 7, 1969.

- [5] Kowalewski, J.: Über die Beziehungen zwischen der Lebensdauer von Bauteilen bei unregelmäßig schwankenden und bei geordneten Belastungsfolgen. DVL-Bericht Nr. 249, Porz-Wahn (Rhld.) Sept. 1963.
- [6] Sjöström, S.: On Random Load Analysis. Transactions of the Royal Institute of Technology, Nr. 181, Stockholm 1961.
- [7] Miles, J. W.: On Structural Fatigue Under Random Loading. *Journ. Aeronaut. Sci.* 21 (1954) 11, S. 753 – 762.
- [8] Refaad El-Sayed: Beitrag zum Berechnungsverfahren von Wirsching und Haugen sowie eine neue Schadensakkumulations-Hypothese . . . VDI-Fortschritt-Bericht, Reihe 5, Nr. 61, Düsseldorf 1982.
- [9] Rajcher, V. L.: Gipotesa spektralnogo summirovania i jejo primenenie dla opredelenia ustalostnoj dolgovečnosti pri dejstvii slučajnych nagruzog. *Trudy CAGI* 1134 Moskva 1969.
- [10] Bolotin, V. V.: *Statističeskije metody v strojitelnoj mehanike*. Izd. literatury po strojitelstvu, Moskva 1965.
- [11] Bolotin, V. V.: *Wahrscheinlichkeitsmethoden zur Berechnung von Konstruktionen*. VEB Verlag für Bauwesen, Berlin 1981.
- [12] Hänel, B.: Spektraldichte und Kollektiv. *IfL-Mitt.* 14 (1975) 1/2, S. 42 – 49.
- [13] Hänel, B.: Betriebsfestigkeitsnachweis auf der Grundlage der Spektraldichte des regellosen Beanspruchungsprozesses. *IfL-Mitt.* 15 (1976) 7/8, S. 252 – 260.
- [14] Joensson, D.: Beispiele zur spektralanalytischen Lebensdauerberechnung. *Techn. Mechanik* 7 (1986) 2, S. 31.
- [15] Lange, D.: *Lebensdauerbestimmung für regellos beanspruchte Bauteile auf der Grundlage stochastischer Kenngrößen*. Diss. TU Dresden 1983.
- [16] Schenck-Hydropuls System Betriebsanleitungen Fa. Carl Schenck AG, Darmstadt: FMR 200 (1975), GAUS 20 (1977) DISK 40 (1981).
- [17] Achilles, D.: *Die Fourier-Transformation in der Signalverarbeitung*. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York 1978.
- [18] *Neue Anwendung schneller Fouriertransformation in der Betriebsfestigkeit und finiter Elemente in der Sintertheorie*. Dissertation B, TU Dresden 1985.