

Zur Klassifizierung mehrparametrischer Dämpfungsmodelle

H. Müller zum Hagen, B. Nolte

Vier Dämpfungsmodelle wurden in Nolte und Müller zum Hagen (2005) hinsichtlich ihrer mathematischen Struktur beschrieben: Das Maxwell-Modell, das Jeffreys-Modell, das Kelvin-Voigt-Modell sowie das Poynting-Thomson-Modell. Die Diskussion der Modelle erfolgte an den partiellen Differentialgleichungen in der Verschiebung. Weitere physikalische Untersuchungen fanden statt. Es hat sich, dass zwei der partiellen Differentialgleichungen (Dämpfungsmodell nach Maxwell und Poynting-Thomson) rein hyperbolisch sind und die zwei anderen partiellen Differentialgleichungen vom parabolischen-hyperbolischen Typ sind. Diese Erkenntnis wird in dieser Arbeit auf mehrparametrische Dämpfungsmodelle übertragen.

1 Einleitung

In der ingenieurwissenschaftlichen Literatur ist es üblich, für rheologische Dämpfungsmodelle, die sich auf die Verkettungen von einzelnen Grundelementen (namentlich Feder und Dämpfer) beziehen, Stoffgesetze aufzustellen, die den differentiellen Zusammenhang zwischen der Spannung und der Dehnung eines Modells beschreiben. Dieses wird hier natürlich ebenfalls vollzogen. Wichtiger für die nunmehr anstehende Strukturanalyse sind jedoch nicht die Stoffgesetze, sondern die sich hieraus mittels des Newtonschen Gesetzes ergebenden partiellen Differentialgleichungen (in der Verschiebung) eines konkreten dissipativen Wellenleiters.

2 Zur Struktur n -gliedriger Maxwell-Parallelschaltungen und Kelvin-Voigt-Ketten mit Abschluss

Für eine n -gliedrige Kelvin-Voigt-Kette nach Bild 1 mit Feder- oder Dämpfer- oder Maxwell-Abschluss



Bild 1. n -gliedrige Kelvin-Voigt-Kette mit Abschluss

lässt sich das Bildungsgesetz für die partielle Differentialgleichung des Dämpfungsmodells nach Bild 1 angeben mit $s_D = 1$, wenn sich im Abschluss ein Dämpfer befindet, sonst $s_D = 0$ und $s_F = 1$, wenn sich im Abschluss eine Feder befindet, sonst $s_F = 0$:

$$\sum_{k=0}^n a_k u_{,xxx}^{(k)} = \sum_{j=1}^n b_{j+1} u_{,t}^{(j+1)} \quad \text{für } s_D = 0, s_F = 0 \quad (1)$$

$$\left[\sum_{k=0}^n a_k u_{,xxx}^{(k)} \right]_t = \sum_{j=1}^n b_{j+1} u_{,t}^{(j+1)} + b_{n+2} u_{,t}^{(n+2)} \quad \text{für } s_D = 1, s_F = 0 \quad (2)$$

$$\sum_{k=0}^n a_k u_{,xxx}^{(k)} = \sum_{j=1}^n b_{j+1} u_{,t}^{(j+1)} + b_{n+2} u_{,t}^{(n+2)} \quad \text{für } s_D = 0, s_F = 1 \quad (3)$$

$$\left[\sum_{k=0}^n a_k u_{,xxx}^{(k)} \right]_t = \sum_{j=1}^n b_{j+1} u_{,t}^{(j+1)} + \sum_{m=1}^2 b_{m+n+1} u_{,t}^{(m+n+1)} \quad \text{für } s_D = 1, s_F = 1 \quad (4)$$

Für eine n -gliedrige Maxwell-Parallelschaltung nach Bild 2

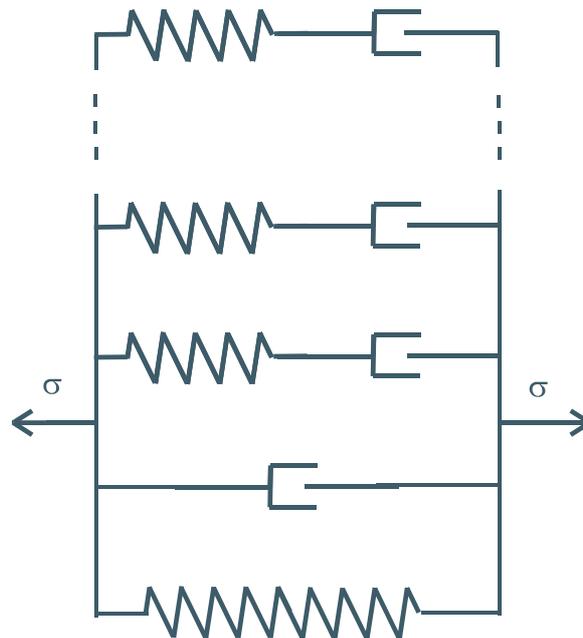


Bild 2 n -gliedrige Maxwell-Kette mit Abschluss

lässt sich ebenfalls das Bildungsgesetz für die partielle Differentialgleichung des Dämpfungsmodells nach Bild 2 angeben mit $s_D = 1$, wenn sich im Abschluss ein Dämpfer befindet, sonst $s_D = 0$ und $s_F = 1$, wenn sich im Abschluss eine Feder befindet, sonst $s_F = 0$:

Satz 1: Die partielle Differentialgleichung einer n -gliedrigen Maxwell-Parallelschaltung lautet (nach Bild 2):

$$s_D a_{n+1} u_{,xx}^{(n+1)} + \sum_{k=1}^n a_k u_{,xx}^{(k)} + s_F a_0 u_{,xx} = \sum_{j=1}^{n+1} b_{j+1} u_{,t}^{(j+1)} \quad (5)$$

mit $s_D = 1$, wenn sich im Abschluss ein Dämpfer befindet, sonst $s_D = 0$ und $s_F = 1$, wenn sich im Abschluss eine Feder befindet, sonst $s_F = 0$.

Satz 2: Zur Isomorphie: Jeder n -gliedrigen Maxwell-Parallelschaltung mit einem gewissen Abschluss entspricht eine m -gliedrigen Kelvin-Voigt-Kette mit gewissem Abschluss. Je nach Art der Abschlüsse kann $n=m$ gelten. Dies ist jedoch nicht zwingend erforderlich. Die partiellen Differentialgleichungen der Dämpfungsmodelle Reihe/Kette entsprechen einander. Durch Umbenennung der Koeffizienten entsteht aus einer Maxwell-Parallelschaltung mit Abschluss eine Kelvin-Voigt-Kette mit einem in der Regel anderen Abschluss. Dies gilt auch umgekehrt.

Beweis von Satz 1 wird durch vollständige Induktion geführt (Details siehe Nolte (2004)).

Satz 3: Man betrachte die partielle Differentialgleichung (5) für eine n -gliedrige Maxwell-Parallelschaltung mit gewissen Abschlüssen respektive Dämpfer oder Feder nach Satz 1.

Fall $s_D = 1$:

(A) Die partielle Differentialgleichung (5) ist parabolisch-hyperbolisch im Sinne von Nolte und Müller zum Hagen (2005) mit den Charakteristiken $x = \text{const}$. Letzteres bewirkt, dass die Randwerte wieder - wie beim Kelvin-Voigt-Körper und auch bei Jeffreys-Körper - auf den Charakteristiken vorgegeben werden.

(B) Nimmt man von der partiellen Differentialgleichung (5) den Hauptteil (höchste Ableitungsordnung) und den ersten Nebenteil (zweit-höchste Ableitungsordnung) und ersetzt $u_{,t^n}$ durch \bar{u} , dann erhält man folgende PDgl:

$$a_{n+1}\bar{u}_{,xxt} + a_n\bar{u}_{,xx} = b_{n+2}\bar{u}_{,tt} \quad (6)$$

Diese ist von der Grundform der Differentialgleichung des Kelvin-Voigt-Körpers und ist natürlich wieder - wie in (A) - parabolisch-hyperbolisch mit den Charakteristiken $x = \text{const}$. Die Kelvin-Voigt-Gleichung wurde in Nolte und Müller zum Hagen (2005) physikalisch charakterisiert, auch im Hinblick, dass sie parabolisch-hyperbolisch ist.

Fall $s_D = 0$:

(A) Für $n = 1$ ist die partielle Differentialgleichung (5) stark hyperbolisch mit den Charakteristiken $x = \text{const}$ und $x = \pm ct + \text{const}$ und der Schallgeschwindigkeit

$$c = \sqrt{\frac{b_3}{a_1}} \quad (7)$$

(B) Für $n = 2$ und $s_D = 0$ ist die partielle Differentialgleichung (5) stark hyperbolisch mit den gleichen Charakteristiken wie in (A).

(C) Nimmt man für beliebige n , s_F von der partiellen Differentialgleichung (5) wieder den Hauptteil (höchste Ableitungsordnung) und den ersten Nebenteil (zweit-höchste Ableitungsordnung) und ersetzt man wieder (wie im Fall $s_D = 1$ - dort Teil (B) -) den Term $u_{,t^{(n)}}$ durch \bar{u} , dann erhält man folgende PDgl:

$$a_n\bar{u}_{,xxt} + a_{n-1}\bar{u}_{,xx} = b_{n+2}\bar{u}_{,ttt} + b_{n+1}\bar{u}_{,tt} \quad (8)$$

Diese ist von der Grundform der Differentialgleichung des Poynting-Thomson-Körpers und sie ist wieder - wie in (A) und (B) - stark hyperbolisch. Die Poynting-Thomson-Gleichung wurde in Nolte und Müller zum Hagen (2005) physikalisch charakterisiert, auch im Hinblick darauf, dass sie hyperbolisch ist.

Anmerkungen zu Satz 3:

(I) Satz 3 zeigt, dass die Gleichung (5) für $s_D = 1$ parabolisch-hyperbolisch ist. Im Gegensatz dazu ist (5) für $s_D = 0$ mit aller Wahrscheinlichkeit hyperbolisch. Dieses wird durch den 2. Teil ($s_D = 0$) von Satz 3 nahe gelegt. Der Beweis sei dem Leser überlassen.

(II) In den wichtigsten Fällen bestimmt bereits der Hauptteil der partiellen Differentialgleichung ob sie hyperbolisch oder elliptisch ist. Der Hauptteil und der erste Nebenteil einer partiellen Differentialgleichung bestimmen, ob die PDgl - gegebenenfalls nach Transformation auf ein PDgl-System 2. Ordnung - parabolisch-hyperbolisch im Sinne von Nolte und Müller zum Hagen (2005) ist. Daher wird in Satz 3 für $s_D = 1$ in Punkt (B) die PDgl. (5) auf den Hauptteil und den ersten Nebenteil verkürzt. Das Ergebnis ist die Kelvin-Voigt-Grundform. Um eine zu dem eben erwähnten Punkt (B) parallele Behandlung zu erzielen, wird im Punkt (C) des Falles $s_D = 0$ ebenfalls auf den ersten Hauptteil und den ersten Nebenteil verkürzt.

(III) Der Wert für c aus (7) bezieht sich natürlich auf die Charakteristiken der PDgl. (5) für $n = 1$ und $s_D = 0$. Man beachte, dass im Beweis (beim Übergang von (29) auf (30)) eine Transformation der Variablen (x,t) durchgeführt wurde, wodurch die Hauptcharakteristiken $x = \pm ct + \text{const}$ ($c = \sqrt{b_3/a_1}$) auf $x = \pm 1 \cdot t + \text{const}$ übergehen. Nach diesem Übergang wäre dann $c = 1$.

Beweis von Satz 3: Zunächst sei der Fall $s_D = 1$ besprochen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird der Fall $n = 2$ behandelt. Bereits für $n = 2$ lässt sich das Prinzip des Beweises hinreichend erläutern.

Mit der Einführung der neuen Unbekannten

$$\begin{aligned}
 u_0 &= u \\
 u_1 &= u_{,t} \\
 u_2 &= u_{,tt} \\
 u_3 &= u_{,ttt} \\
 v &= u_{,x}
 \end{aligned} \tag{9}$$

lässt sich die Differentialgleichung (5) mit

$$u_0 = u \tag{10}$$

$$u_1 = u_{,t} \tag{11}$$

$$u_2 = u_{,tt} \tag{12}$$

$$u_3 = u_{,ttt} \tag{13}$$

$$v_2 = u_{,xtt} = u_{2,x} \tag{14}$$

$$v_1 = u_{,xt} = u_{1,x} \tag{15}$$

$$v_0 = u_{,x} = u_{0,x} \tag{16}$$

transformieren zu folgendem System:

$$u_{0,t} = u_{,t} = u_{,1} \tag{17}$$

$$u_{1,t} = u_{,tt} = u_{,2} \tag{18}$$

$$u_{2,t} = u_{,ttt} = u_{,3} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
 u_{3,t} &= (s_D a_3 u_{3,xx} + a_2 v_{2,x} + a_1 v_{1,x} + s_F a_0 v_{0,x} \\
 &\quad - b_3 u_3 - b_2 u_2) / b_4
 \end{aligned} \tag{20}$$

$$v_{2,t} = u_{,xtt} = u_{3,x} \tag{21}$$

$$v_{1,t} = u_{,xt} = u_{2,x} \tag{22}$$

$$v_{0,t} = u_{,xt} = u_{1,x} \tag{23}$$

Der Leser mag sich rasch davon überzeugen, dass Äquivalenz gegeben ist (\Rightarrow und \Leftarrow). Der Fall \Rightarrow ist unmittelbar aus den Gleichungen (10)-(16) zu (17)-(23) ersichtlich. Für die Umkehrung, Fall \Leftarrow , müssen die Integrabilitätsbedingungen wie zum Beispiel (21)

$$u_{3,x} = v_{2,t} = u_{,xtt}$$

betrachtet werden. Somit ergibt sich beispielsweise für (21)

$$v_{2,t} = u_{,xtt}$$

$$v_2 = u_{,xtt} + g(x)$$

Dies liefert unter Einarbeitung von Anfangs- sowie Randbedingungen eine verschwindende Integrationskonstante $g(x)$ und somit die Gleichung (13). Gleichungen (17) bis (23) sind äquivalent zu (20) zusammen mit:

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ v_1 \\ v_0 \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ v_1 \\ v_0 \end{pmatrix}_{,x} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_{3,x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (24)$$

Gleichung (20) ist parabolisch bzgl. der Unbekannten u_3 . Gleichung (24) ist leider nicht stark hyperbolisch (Existenz von linear unabhängigen Eigenvektoren) bzgl. der Unbekannten $(u_0, u_1, u_2, v_2, v_1, v_0)^T$. Daher werden weitere Unbekannte eingeführt, d.h. es wird wie folgt umgeformt:

$$u_{2,t} = u_3, v_{1,t} := \bar{v}_1, \bar{v}_{1,t} = u_{3,x} \Leftrightarrow u_{2,t} = u_3, v_{1,t} = u_{2,x} \quad (25)$$

und

$$u_{1,t} = u_2, v_{0,t} := \bar{v}_0, \bar{v}_{0,t} := \bar{\bar{v}}_0, \bar{\bar{v}}_{0,t} = u_{3,x} \Leftrightarrow u_{1,t} = u_2, v_{0,t} = u_{1,x} \quad (26)$$

Ziel ist es, die in (24) störenden x -Ableitungen $u_{1,x}, u_{2,x}$ letztlich so umzuwandeln, dass nur noch die x -Ableitung $u_{3,x}$ übrig bleibt, wobei ja u_3 die parabolische Unbekannte ist (siehe parabolische Gleichung (20)). Also erhält man, dass (20) und (24) äquivalent ist zu:

$$u_{3,t} = (s_D a_3 u_{3,xx} + a_2 v_{2,x} + a_1 v_{1,x} + s_F a_0 v_{0,x} - b_3 u_3 - b_2 u_2) / b_4 \quad (27)$$

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ v_1 \\ \bar{v}_1 \\ v_0 \\ \bar{v}_0 \\ \bar{\bar{v}}_0 \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ v_1 \\ \bar{v}_1 \\ v_0 \\ \bar{v}_0 \\ \bar{\bar{v}}_0 \end{pmatrix}_{,x} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_{3,x} \\ \bar{v}_1 \\ u_{3,x} \\ \bar{v}_0 \\ \bar{\bar{v}}_0 \\ u_{3,x} \end{pmatrix} \quad (28)$$

Das System (27), (28) ist parabolisch-hyperbolisch, wobei die Gleichung (27) parabolisch ist bzgl. u_3 und das System (28) ist (symmetrisch) hyperbolisch mit den einzigen Charakteristiken $x = const$.

Beweis von Satz 3 für den Fall $s_D = 0$ und $n = 1$. Hierfür lautet die Differentialgleichung (5)

$$a_1 u_{,xxt} + s_F a_0 u_{,xx} - b_3 u_{,tt} - b_2 u_{,t} = 0 \quad (29)$$

Zeitdilatation führt auf

$$u_{,xt} + s_F a u_{,xx} - u_{,tt} - b u_{,t} = 0 \quad (30)$$

Mit der Transformation $u_{,t} = \alpha$ und $u_{,x} = v$ gilt sofort

$$u_{,tx} = \alpha_{,x} = u_{,xt} = v_{,t} \quad (31)$$

und die Gleichung (30) lässt sich transformieren zu folgendem System

$$\alpha_{,xx} - \alpha_{,tt} = -s_F a v_{,x} + b \alpha_{,t} \quad (32)$$

$$v_{,t} = \alpha_{,x} \quad (33)$$

$$u_{,t} = \alpha \quad (34)$$

Es sei angemerkt, dass die Gleichung (34) als sukzessiv entkoppelt von dem System (32 und 33) anzusehen ist. Eine weitere charakteristische Transformation mit

$$w := (\partial_x + \partial_t)\alpha = \alpha_{,x} + \alpha_{,t} \quad (35)$$

und

$$(\partial_x - \partial_t)w = w_{,x} - w_{,t} \quad (36)$$

$$= \alpha_{,xx} - \alpha_{,tt} \quad (37)$$

ergibt das System

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ w \\ v \end{pmatrix}_{,t} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ b & 1 & s_F a \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ w \\ v \end{pmatrix}_{,x} + \begin{pmatrix} w \\ -bw \\ 0 \end{pmatrix} \quad (38)$$

Dieses System ist nach Hellwig (1977) stark hyperbolisch, weil die Determinante der Matrix aus Gleichung (38)

$$\det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ b & 1-\lambda & s_F a \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)(1-\lambda)(-\lambda) = 0 \quad (39)$$

verschiedene reelle Lösungen in λ besitzt und somit drei linear unabhängige Eigenvektoren existieren. Dies ist hier offensichtlich der Fall:

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1 \quad (40)$$

Es sei angemerkt, dass die Lösung hier unabhängig von der Variablen $s_F a$ ist.

Beweis von Satz 3 für den Fall $s_D = 0$ und $n = 2$ und $s_F = 0$. Hierfür lautet die Differentialgleichung (5)

$$a_2 u_{,xxtt} + a_1 u_{,xxt} - b_4 u_{,ttt} - b_3 u_{,tt} - b_2 u_{,t} = 0 \quad (41)$$

Zeitdilatation führt auch hier auf

$$u_{,xxt} + au_{,xxt} - u_{,ttt} - bu_{,tt} - cu_{,t} = 0 \quad (42)$$

Mit sukzessiven Entkopplung $u_{,t} = \alpha$ und der weiteren Transformation $\alpha_{,t} = \beta$ und $\alpha_{,x} = v$ gilt sofort

$$\beta_{,x} = v_{,t} \quad (43)$$

und die Gleichung (42) lässt sich transformieren zu folgendem System

$$\beta_{,xx} - \beta_{,tt} = -av_{,x} + b\beta_{,t} + c\beta \quad (44)$$

$$v_{,t} = \beta_{,x} \quad (45)$$

$$\alpha_{,t} = \beta \quad (46)$$

$$u_{,t} = \alpha \quad (47)$$

Eine erneute weitere charakteristische Transformation mit

$$w := (\partial_x + \partial_t)\beta = \beta_{,x} + \beta_{,t} \quad (48)$$

und

$$(\partial_x - \partial_t)w = w_{,x} - w_{,t} \quad (49)$$

$$= \beta_{,xx} - \beta_{,tt} \quad (50)$$

ergibt das System

$$\beta_{,t} = -\beta_{,x} + w \quad (51)$$

$$w_{,t} = w_{,x} + av_{,x} + b\beta_{,x} - bw - c\beta \quad (52)$$

$$v_{,t} = \beta_{,x} \quad (53)$$

$$\alpha_{,t} = \beta \quad (54)$$

$$u_{,t} = \alpha \quad (55)$$

Also gilt:

$$\begin{pmatrix} \beta \\ w \\ v \\ u \\ \alpha \end{pmatrix}_{,t} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ w \\ v \\ u \\ \alpha \end{pmatrix}_{,x} + \begin{pmatrix} w \\ -bw - c\beta \\ 0 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad (56)$$

Für die Eigenwerte der Matrix aus Gleichung (56) gilt

$$\lambda_{1,2,3} = 0, \lambda_4 = -1, \lambda_5 = 1 \quad (57)$$

Die zugehörigen Eigenvektoren lauten

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ b/2 - a/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (58)$$

Die Vektoren $v_i, i = 1 - 5$, sind linear unabhängig. Also ist (56) stark hyperbolisch und folglich (41) ebenfalls.

3 Zusammenfassung

Die in der ingenieurmäßigen Disziplinen Anwendung findenden rheologischen Dämpfungsmodelle werden in dieser Arbeit streng mathematisch klassifiziert. Alle Dämpfungsmodelle weisen hyperbolische Anteile auf. Es handelt sich um Wellenphänomene. Neu ist die Entdeckung eines bei einigen Dämpfungsmodellen auftretenden parabolischen Anteils. Somit findet eine Klasseneinteilung in zwei Hauptklassen statt. Die eine ist rein hyperbolisch, während die andere eine parabolisch-hyperbolische Mischform darstellt. Die Diskussion findet an einer Maxwell-Parallelschaltung mit Abschlüssen statt. Diese Untersuchung ist hinreichend, da Isomorphie zur Kelvin-Voigt-Kette besteht.

Folgende Regel gilt: Existiert ein Weg durch das Modell, welcher nur über Dämpfer führt, so liegt in der problembeschreibenden partiellen Differentialgleichung der parabolisch-hyperbolische Fall vor, gibt es diesen Weg nicht, so ist die partielle Differentialgleichung rein hyperbolischen Typs.

Literatur

Hellwig, G.: *Partial Differential Equations*. Teubner Verlag, Stuttgart, (1977).

Kreiss, H.-O.; Lorenz, J.: *Initial Boundary Value Problems and the Navier-Stokes Equation*. Academic Press, Inc., San-Diego, (1989).

Nolte, B.: *Dämpfung – eine strukturelle Analyse*. eingereichte Habilitationsschrift, Helmut-Schmidt-Universität, Hamburg, (2004).

Nolte, B. ; Müller zum Hagen, H.: Zur Klassifizierung sowie zur Existenz, Eindeutigkeit und Stabilität der Lösungen klassischer kontinuumsmechanischer Dämpfungsmodelle. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, ZAMM, 85, 5, (2005), 339-350.

Adresse: Prof. Dr. rer. nat. habil. Müller zum Hagen, Institut für Mathematik der Helmut-Schmidt-Universität – Universität der Bundeswehr Hamburg, D-22043 Hamburg
 Dr.-Ing. Bodo Nolte, Forschungsanstalt der Bundeswehr für Wasserschall und Geophysik, D-24148 Kiel
 email: bodonolte@bwb.de